

FONCTIONS ET PROBABILITÉS

PROBLÈME

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

PARTIE A : CAMPAGNE DE PUBLICITÉ

1. On a : $f(1) = \frac{9 \times 1}{10 \times 1 + 40} = \frac{9}{50} = 0,18$.

La probabilité que cette personne connaisse ce smartphone après une semaine de publicité est égale à 18 %.

On a : $f(2) = \frac{9 \times 2}{10 \times 2 + 40} = \frac{18}{60} = 0,30$.

La probabilité que cette personne connaisse ce smartphone après deux semaines de publicité est égale à 30 %.

2. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 9x$ et $v(x) = 10x + 40$.

Pour tout $x \in [0 ; 26]$: $u'(x) = 9$ et $v'(x) = 10$;

Pour tout $x \in [0 ; 26]$: $f'(x) = \frac{9 \times (10x + 40) - 9x \times 10}{(10x + 40)^2} = \frac{90x + 360 - 90x}{(10x + 40)^2} = \frac{360}{(10x + 40)^2}$.

3. Comme un carré est toujours positif, alors, pour tout $x \in [0 ; 26]$: $f'(x) > 0$.

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 26]$.

4. a. On a : $y < 0,75 \Leftrightarrow \frac{9x}{10x + 40} < 0,75 \Leftrightarrow 9x < 0,75 \times (10x + 40) \Leftrightarrow 9x < 7,5x + 30$.

Soit : $y < 0,75 \Leftrightarrow 1,5x < 30 \Leftrightarrow x < 20$.

Par conséquent, la variable y de l'algorithme reste inférieure à 0,75 tant que la variable x est inférieure à 20.

A la fin de l'algorithme, la variable x est égale à 20.

b. La probabilité que cette personne connaisse ce smartphone est supérieure ou égale à 75 % à partir de la 20^{ème} semaine.

PARTIE B : DURÉE DE VIE D'UN SMARTPHONE

1. a. La courbe de la fonction de densité de la variable aléatoire X est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ donc l'espérance μ est égale à 84.

b. Par symétrie, on a : $p(44 \leq X \leq 124) = 1 - 2 \times p(X \leq 44) = 1 - 2 \times 0,025 = 1 - 0,05 = 0,95$.

2. A la calculatrice avec $\mu = 84$ et $\sigma = 20,4$, on obtient : $p(X > 120) \approx 0,04$.

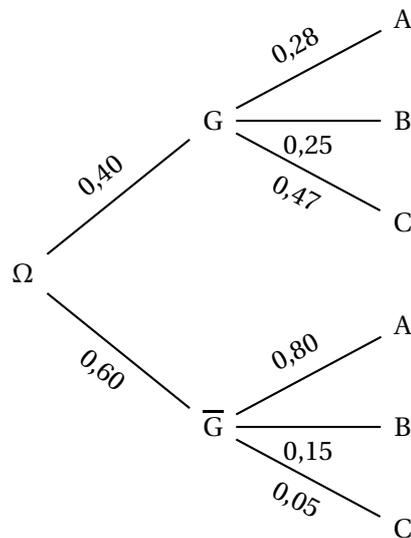
3. Il s'écoule 120 mois en 10 ans.

D'après la question précédente, la probabilité que la durée de vie d'un smartphone soit de plus de 10 ans est environ égale à 4 %.

On peut infirmer la campagne de publicité de ce modèle de smartphone. La probabilité que la durée de vie d'un smartphone soit de plus de 10 ans est largement inférieure à 75 %.

PARTIE C : SERVICE APRÈS-VENTE

1. Arbre de probabilités :



2. On cherche $p(G \cap A)$.

On a : $p(G \cap A) = p(G) \times p_G(A) = 0,40 \times 0,28 = 0,112$.

La probabilité que le client ait souscrit une garantie de deux ans et qu'il n'ait pas contacté le SAV est égale à 11,2 %.

3. On cherche $p(A)$.

On a : $p(A) = p(G \cap A) + p(\bar{G} \cap A) = 0,112 + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(A) = 0,112 + 0,60 \times 0,80 = 0,592$.

La probabilité que le client n'ait pas contacté le SAV est égale à 59,2 %.