VARIABLES ALÉATOIRES

EXERCICE 1

Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré numéroté de 1 à 6. Si le résultat est :

- 1, 2 ou 3, alors on perd 2 points ;
- 4 ou 5, alors on ne perd ni ne gagne rien ;
- 6, alors on gagne 3 points.

On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain, positif ou négatif, du joueur.

1. Recopier et compléter le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable G :

Valeur g_i	-2	0	3
Probabilité $p(G = g_i)$			

2. Calculer $E(G)$.
3. Que peut-on remarquer ?

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique des brioches de poids standard 700 g.

Si une brioche pèse entre 700 g et 720 g, elle est vendue au prix de 3 €. Sinon, elle est vendue dans des magasins à prix cassés à 2 € si elle pèse plus de 720 g et à 1,50 € si elle pèse moins de 700 g.

On sait que :

- 80 % des brioches ont une masse comprise entre 700 et 720 g ;
- 15 % des brioches ont une masse inférieure à 700 g ;
- 5 % des brioches ont une masse supérieure à 720 g.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque brioche tirée au hasard, associe son prix de vente.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer $E(X)$.
4. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

Valeur x_i	0	10	20	30	40
Probabilité $p(X = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

Calculer l'espérance $E(X)$.

EXERCICE 4

Soit Y une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

Valeur y_i	-3	-1	0	1	5
Probabilité $p(Y = y_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Calculer l'espérance $E(Y)$.

EXERCICE 5

Pour financer leur voyage scolaire, des élèves ont organisé une tombola et vendu 400 billets. Le nombre de billets gagnants est résumé dans le tableau ci-dessous :

Gains en euros	100	50	20	10
Nombre de billets	1	2	5	10

Les autres billets sont perdants.

Loïc achète un billet. On note G la variable aléatoire qui, au choix d'un billet, associe le gain correspondant.

1. Dresser la loi de probabilité de G.
2. Calculer l'espérance $E(G)$. Interpréter le résultat.
3. Quel est le prix minimum d'un billet de tombola que les élèves ont dû fixer pour ne pas perdre de l'argent ?

EXERCICE 6

Une entreprise fabrique des téléphones portables.

Pendant la période de garantie, le fabriquant doit effectuer les réparations à ses frais. Une étude sur les téléphones vendus permet d'affirmer que :

- 10 % des téléphones auront uniquement un problème de batterie ;
- 5 % des téléphones auront uniquement un problème d'écran ;
- 2 % des téléphones auront un problème de batterie et un problème d'écran ;
- 3 % seront jugés non réparables.

Dans les autres cas, le client n'utilisera pas la garantie de son téléphone.

Les coûts pour l'entreprise sont de 20 € pour un problème de batterie, 40 € pour un problème d'écran et 100 € si le téléphone ne peut être réparé et s'il doit être remplacé.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone vendu, associe son coût de réparation.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en complétant le tableau suivant :

Valeur x_i	0	20	40	60	100
Probabilité $p(X = x_i)$					

2. **a.** Interpréter à l'aide d'une phrase l'événement : $\{X > 0\}$.
   b. Calculer sa probabilité.
3. Calculer $E(X)$. Que représente cette valeur pour l'entreprise ?
4. Un téléphone vendu 250 € a un coût de fabrication de 200 €. Quel est le bénéfice espéré pour l'entreprise, par téléphone vendu, après ses éventuels frais de garantie ?

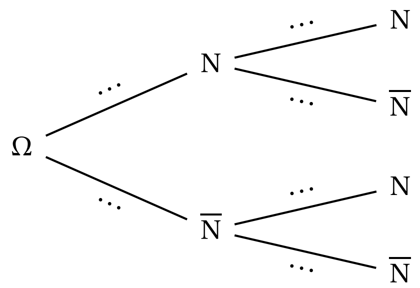
EXERCICE 7

Une urne contient 10 boules dont 4 noires. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. On suppose que chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

On note :

- N : « La boule tirée est noire lors d'un tirage ».
- X la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le nombre de boules noires tirées.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
3. Calculer : $p(X = 0)$, $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

EXERCICE 8

On effectue, successivement et avec remise, deux tirages d'un jeton dans une urne contenant 3 jetons verts et 7 jetons rouges. Le succès lors d'un tirage est l'événement S : « Le jeton est vert ».

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement, associe le nombre de succès.
   a. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Déterminer ses paramètres n et p.
   b. Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
2. **a.** Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   b. Calculer : $p(X = 0), p(X = 1) et p(X = 2)$.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ de cette loi.

EXERCICE 9

Lors d'un match de basket, un joueur a obtenu la possibilité de tirer trois lancers francs.

La probabilité qu'il réussisse un lancer franc est égale à $p = 0{,}7$. On suppose que cette probabilité reste identique et ceci indépendamment du résultat précédent.

Lors d'un tir, on note succès l'événement S : « Le lancer franc est réussi ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque série de trois lancers francs, associe le nombre de succès.
   a. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres n et p.
   b. Interpréter concrètement les événements : $\{X = 0\}$; $\{X = 2\}$; $\{X \geqslant 2\}$ et $\{X \leqslant 2\}$.
   c. L'équipe du joueur reprendra l'avantage au score s'il réussit au moins deux lancers francs.
   Calculer la probabilité que l'équipe reprenne l'avantage.

EXERCICE 10

On dispose d'un dé cubique bien équilibré numéroté de 1 à 6.

Lors d'un lancer, on appelle succès l'événement : « Le dé affiche le numéro 6 ».

On lance successivement et à deux reprises le dé.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer le nombre de chemins comportant :
   - aucun succès ;
   - un seul succès ;
   - deux succès.
3. Recopier et compléter : $\binom{\cdot}{2} = 1$; $\binom{\cdot}{1} = \ldots$; $\binom{2}{0} = \ldots$.

EXERCICE 11

1. En utilisant éventuellement un arbre, calculer : $\binom{3}{0}$; $\binom{3}{1}$; $\binom{3}{2}$; $\binom{3}{3}$.
2. En utilisant éventuellement un arbre, calculer : $\binom{4}{0}$; $\binom{4}{1}$; $\binom{4}{2}$; $\binom{4}{3}$; $\binom{4}{4}$.

EXERCICE 12

On sait que : $\binom{9}{2} = 36$; $\binom{9}{3} = 84$; $\binom{9}{4} = 126$; $\binom{9}{5} = 126$.

1. En utilisant les valeurs précédentes, calculer : $\binom{10}{3}$; $\binom{10}{4}$; $\binom{10}{5}$.
2. Quelle est la valeur de $\binom{10}{1}$? Et de $\binom{10}{2}$?

EXERCICE 13

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On note F la variable aléatoire qui, à chaque série de 5 lancers, associe le nombre de côtés « FACE » obtenus.

1. La variable aléatoire F suit une loi binomiale. Quelles sont ses paramètres ?
2. Réaliser le triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$.
3. Calculer $p(F = 3)$. Interpréter ce résultat.
4. Calculer la probabilité que le côté « FACE » apparaisse au moins 3 fois.

EXERCICE 14

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}4$.

On sait que : $\binom{6}{2} = 15$ et $\binom{6}{3} = 20$.

1. Calculer $p(X = 2)$.
2. Calculer $p(X = 3)$.

EXERCICE 15

Un joueur lance n fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On note F la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de côtés « FACE » obtenus.

On admet que F suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}5$.

Les résultats sont à arrondir à 0,001 *près.*

1. Interpréter l'événement : $\{F \geqslant 2\}$.
2. On suppose que $n = 4$.
   a. Calculer $p(F = 0)$ puis $p(F = 1)$.
   b. En déduire la probabilité d'obtenir au moins deux fois le côté « FACE » lors de 4 lancers successifs.
3. On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.
   a. Calculer en fonction de n : $p(F = 0)$ et $p(F = 1)$.
   b. Démontrer que : $p(F \leqslant 1) = (1 + n)\, 0{,}5^n$.
4. Le joueur souhaite déterminer le nombre minimal n de lancers pour qu'il obtienne au moins deux fois le côté « FACE » avec une probabilité supérieure ou égale à 0,999.
   a. Montrer que cette condition est équivalente à : $p(F \leqslant 1) \leqslant 0{,}001$.
   b. Pour déterminer le nombre minimal de lancers, le joueur a réalisé l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
Tant que (1 + N) 0,5^N > 0,001
    N ← N + 1
Fin du Tant que
Afficher N
```

   Réaliser le programme et l'exécuter.

EXERCICE 16

Une société de livraison de colis réussit, pour les colis pris en charge avant 10h00, à les livrer dès le lendemain avec une probabilité égale à 0,75.

Un commerçant dépose avant 10h00 sept colis pour ses clients.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de sept colis, associe le nombre de colis livrés le lendemain. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Déterminer les paramètres n et p de la loi de X.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : « Tous les colis arriveront le lendemain » ;
   - B : « Au moins un colis n'arrivera pas le lendemain ».
3. **a.** Compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 7$.
   b. En déduire $\binom{7}{5}$.
   c. Calculer la probabilité de l'événement C : « Exactement deux colis n'arriveront pas le lendemain ».
4. **a.** Interpréter l'événement $\{X = 4\}$.
   b. Calculer la probabilité $p(X = 4)$.

EXERCICE 17

Kate has 80 songs on her mobile and 20 of them are her favorite.

She listens to 4 songs in a random way. The number of favorite songs she listens to is called X.

The choice of a song is independant of the others. So a song can be chosen several times.

1. What does the event $\{X = 4\}$ mean?
2. Calculate the probability of the event $\{X = 4\}$.

EXERCICE 18

Une classe de 35 élèves se présente au CDI.

Le documentaliste sait que la probabilité qu'un élève choisisse de travailler sur un ordinateur est égale à 0,6.

On considère que chacun des élèves décide de travailler sur un ordinateur indépendamment des autres élèves.

Dans cet exercice, les résultats seront donnés en utilisant le menu « loi binomiale » de la calculatrice.

On arrondira à 10^{-3} *près.*

1. Calculer la probabilité que :
   - **a.** Moins de 20 élèves souhaitent travailler sur un ordinateur.
   - **b.** Au moins 25 élèves souhaitent travailler sur un ordinateur.
   - **c.** Exactement 21 élèves souhaitent travailler sur un ordinateur.
2. Le documentaliste dispose de 18 ordinateurs.

   Quelle est la probabilité qu'il réussisse à satisfaire toutes les demandes?

EXERCICE 19

Une entreprise commande 150 composants électroniques.

Le fournisseur indique que la probabilité qu'un composant électronique soit défectueux est égale à 0,025.

Le fonctionnement d'un composant électronique est indépendant de celui des autres composants électroniques.

La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce choix de 150 composants à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 150 composants, associe le nombre de composants défectueux.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près.*

1. Quelle est la loi suivie par X? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucun composant défectueux dans le lot.
3. En utilisant la calculatrice, calculer :
   - **a.** La probabilité qu'il y ait exactement 4 composants défectueux.
   - **b.** La probabilité qu'il y ait au plus 5 composants défectueux.

EXERCICE 20

La compatibilité sanguine entre deux individus se détermine à l'aide de deux systèmes :

- ABO qui permet de déterminer les quatre groupes sanguins O, A, B et AB selon la présence des antigènes A et B ;
- le rhésus, positif ou négatif, selon la présence de l'antigène D.

La répartition des groupes sanguins en France est donnée dans le tableau ci-dessous :

	O	A	B	AB
Rhésus +	36 %	37 %	9 %	3 %
Rhésus −	6 %	7 %	1 %	1 %

Les résultats sont à arrondir à 10^{-3} *près.*

1. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit du groupe O ?
2. Dans un centre de transfusion sanguine, neuf personnes se présentent pour donner leur sang.

   On note X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de neuf personnes, associe le nombre de personnes du groupe O.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

   b. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 9$.
3. En utilisant le triangle de Pascal calculer :

   a. La probabilité d'avoir exactement quatre personnes du groupe O.

   b. La probabilité d'avoir au moins quatre personnes du groupe O.
4. Ce centre de transfusion manque de sang du groupe O rhésus négatif. Le médecin a besoin qu'au moins une personne sur les neuf présentes soit du groupe O^-.

   On note Y la variable aléatoire qui, à chaque groupe de neuf personnes, associe le nombre de personnes du groupe O^-.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ? Préciser ses paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que le médecin obtienne satisfaction ?

EXERCICE 21

Léna prend le bus chaque matin pour se rendre au lycée. Son bus roule à 40 km/h en moyenne sur un trajet de 4 km. Sur son parcours, il y a 8 arrêts de bus. A chaque fois, la probabilité pour que le bus s'arrête est de 0,75 ce qui lui fait perdre 1 minute.

On pose X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le nombre de fois que le bus s'arrêtera sur le trajet de Léna. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres n et p de la loi de X.
2. Calculer la durée du trajet si le bus n'effectue aucun arrêt.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
4. Calculer le temps de parcours moyen pour que Léna se rende au lycée.
5. Léna n'a que 11 minutes pour effectuer son trajet lorsqu'elle monte dans le bus.

   Calculer la probabilité pour qu'elle soit à l'heure.

EXERCICE 22

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.

Sur le parcours, il rencontre 6 feux bicolores non synchronisés.

Pour chaque feu bicolore, la probabilité qu'il soit au vert est égale à $\frac{2}{3}$ et celle qu'il soit au rouge est égale à $\frac{1}{3}$.

Un feu rouge lui fait perdre une minute et demi.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire donnant le temps en minutes mis par l'élève pour se rendre au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. **a.** Exprimer T en fonction de X.

b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter le résultat.

3. L'élève part 17 minutes avant le début du cours.

a. Peut-il espérer être à l'heure ?

b. Calculer la probabilité pour qu'il arrive en retard.

EXERCICE 23

Pour tout entier naturel n, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Autrement dit, S_n est la somme des coefficients binomiaux qui se trouvent sur la ligne n du triangle de Pascal.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			$\leftarrow$ ligne de rang $n = 4$
1	5	10	10	5	1		
...	...	...	...	...	...	...	
			$\uparrow$				
			colonne de rang $k = 3$				

1. **a.** Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4 à l'aide du triangle de Pascal.

b. Conjecturer une expression de S_n en fonction de n.

2. **a.** Écrire la somme S_5.

b. Justifier que $S_5 = 2 \times S_4$ en utilisant notamment la propriété :

Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

3. **a.** Montrer de même que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_{n+1} = 2 \times S_n$.

b. En déduire S_n en fonction de n pour tout entier n.

EXERCICE 24

Un lièvre et une tortue lancent un dé cubique parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6.

- Si le dé tombe sur 6, le lièvre gagne et la partie s'arrête ;
- Si le dé tombe sur un autre numéro, la tortue avance d'une case. La tortue gagne et la partie s'arrête si elle parvient à avancer de n cases.

On note $p_n(T)$ la probabilité que la tortue gagne et $p_n(L)$ la probabilité que le lièvre gagne.

Partie A. Étude du cas $n = 4$

1. **a.** Montrer que $p_4(T) \simeq 0{,}48$.

   b. A quel animal le jeu est-il favorable ?

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Combien de lancers faut-il en moyenne pour obtenir un vainqueur ?

3. Les deux animaux jouent 10 parties indépendantes.

   a. Quelle est la probabilité que la tortue gagne exactement 5 fois ?

   b. Quelle est la probabilité que la tortue gagne au moins 2 fois ?

Partie B. Cas général

1. **a.** Calculer $p_n(T)$ en fonction de n.

   b. Déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.

2. **a.** Calculer l'espérance du nombre de parties remportées par la tortue dans une série de 10 parties jouées.

   b. Pour quelles valeurs de n la tortue peut-elle espérer gagner au moins 9 parties sur 10 ?