# SUITES NUMÉRIQUES

## EXERCICE 1

Dans chaque cas, on donne les cinq premiers termes d'une suite $(u_n)$. Trouver les deux termes suivants possibles $u_5$ et $u_6$ de manière logique.

1. $u_0 = -3$ $u_1 = 1$ $u_2 = 5$ $u_3 = 9$ $u_4 = 13$
2. $u_0 = 1$ $u_1 = 3$ $u_2 = 9$ $u_3 = 27$ $u_4 = 81$
3. $u_0 = 7$ $u_1 = 12$ $u_2 = 19$ $u_3 = 28$ $u_4 = 39$
4. $u_0 = -1$ $u_1 = 2$ $u_2 = -4$ $u_3 = 8$ $u_4 = -16$
5. $u_0 = \frac{1}{2}$ $u_1 = \frac{3}{5}$ $u_2 = \frac{5}{8}$ $u_3 = \frac{7}{11}$ $u_4 = \frac{9}{14}$

## EXERCICE 2

Déterminer la moyenne arithmétique des réels $a$ et $b$ dans chacun des cas suivants :

1. $a = 5$ et $b = 15$.
2. $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{3}{7}$.
3. $a = 105$ et $b = -205$.

## EXERCICE 3

1. Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.
   Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ et $u_6$.
2. Soit $(v_n)$ la suite arithmétique de raison $-8$ et de premier terme $v_0 = 28$.
   Calculer $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ et $v_6$.
3. Soit $(w_n)$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $w_0 = \frac{1}{7}$.
   Calculer $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$ et $w_6$.

## EXERCICE 4

1. Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 7$.
   Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ puis calculer $u_{10}$ et $u_{100}$.
2. Soit $(v_n)$ une suite arithmétique telle que $v_2 = 7$ et $v_6 = 9$.
   Calculer sa raison $r$ puis son premier terme $v_0$.

**EXERCICE 5**

Dans chaque cas, on donne les premiers termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$ d'une suite $(u_n)$.
Dans quel cas peut-elle être arithmétique ?

1. 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16.
2. 28 ; 21 ; 14 ; 7 ; 0.
3. 5,2 ; 5,6 ; 6 ; 6,4 ; 6,8.

**EXERCICE 6**

1. Calculer la somme des 500 premiers entiers naturels non nuls.
2. Calculer la somme des entiers de 35 à 150.

**EXERCICE 7**

Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ puis en déduire $u_{15}$.
2. Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{15}$.

**EXERCICE 8**

Soit $(u_n)$ la suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_{14} = 39$.

1. Déterminer le nombre de termes de $u_3$ à $u_{14}$.
2. Calculer $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{14}$.

**EXERCICE 9**

Une personne qui n'a aucune pratique sportive décide au cours d'un mois de 30 jours de faire chaque jour 5 minutes de sport de plus que le jour précédent.
On modélise cette situation par une suite $(t_n)$ où $t_n$ est le temps consacré par cette personne à faire du sport le $n$-ième jour de ce mois.

1. Déterminer $t_1$ et $t_2$.
2. Déterminer la nature de la suite $(t_n)$.
3. Exprimer $t_n$ en fonction de $n$.
4. Déterminer le temps consacré à faire du sport le trentième jour.
5. Calculer $S = t_1 + t_2 + \ldots + t_{30}$.
6. Interpréter ce dernier résultat.

**EXERCICE 10**

Un apiculteur s'inquiète pour sa population d'abeilles.
Il l'évalue la première année à 10 000, la deuxième à 9 250, et la troisième à 8 200.
Peut-il modéliser l'évolution du nombre d'abeilles par une suite arithmétique ?

**EXERCICE 11**

Dans une station service lors des trois derniers mois de l'année 2019, le prix du gasoil a évolué de la manière suivante :

| Mois | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|
| Prix (en euros) | 1,491 | 1,503 | 1,515 |

L'évolution de ce prix peut-elle être modélisée par une suite arithmétique ? Si oui, laquelle ?

**EXERCICE 12**

On place un capital de 1 250 € à intérêts simples au taux annuel de 6 %. Cela signifie que les intérêts produits chaque année sont égaux à 6 % de 1 250 €.

On désigne par $I$ les intérêts produits chaque année et par $C_n$ la somme disponible au bout de $n$ années. On a donc : $C_0 = 1\,250$.

1. Calculer $I$.
2. Calculer $C_1$, $C_2$ et $C_3$.
3. Montrer que $(C_n)$ est une suite arithmétique. Quel est son premier terme ? Quelle est la raison ?
4. Exprimer $C_n$ en fonction de $n$.
5. Calculer la somme disponible au bout de 5 ans.
6. Au bout de combien d'années la somme disponible dépasse-t-elle 2 000 € ?

**EXERCICE 13**

La cloche d'une église sonne toutes les heures : 1 coup à 1h00 et à 13h00 ; 2 coups à 2h00 et à 14h00 ; ... ; 12 coups à midi et à minuit. Un villageois se plaint du bruit.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $u_n$ le nombre de coups à la $n$-ième heure.

Combien de tintements le villageois entend-il en une journée ?

**EXERCICE 14**

Cédric s'est inscrit au marathon de Paris et il souhaite organiser sa préparation.

Dans son programme d'entraînement hebdomadaire, il prévoit une séance unique.

Quatre mois avant le départ (on considèrera que cela revient à 16 semaines), lors de sa première semaine de préparation, il court 15 kilomètres. Chaque semaine, il augmente la distance parcourue de 1,5 kilomètre.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $u_n$ la distance parcourue pendant la séance de la $n$-ième heure.

1. Préciser $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.
3. Pensez-vous que Cédric sera prêt pour le marathon de Paris ?
4. Quelle distance aura-t-il parcourue pendant ses quatre mois d'entraînement ?

**EXERCICE 15**

Dans une ville, le prix du m$^3$ d'eau a augmenté de la façon suivante : il coûtait 3,20 euros le 1$^{\text{er}}$ janvier 2018, 3,36 euros le 1$^{\text{er}}$ janvier 2019 et 3,55 euros le 1$^{\text{er}}$ janvier 2020.

Peut-on modéliser l'évolution du prix du m$^3$ d'eau par une suite géométrique ?

**EXERCICE 16**

Dans un laboratoire, on introduit initialement 1 000 g de bactéries dans une cuve de milieu nutritif. Le jour suivant, la masse de bactéries est de 1 150 g et le troisième jour de 1 322,5 g.

L'évolution de la masse de bactéries peut-elle être modélisée par une suite géométrique ?

**EXERCICE 17**

1. Quels sont les coefficients multiplicateurs associés à une hausse de 20 % et à une hausse de 15 % ?
2. Déterminer la moyenne géométrique de 1,2 et 1,15.
3. En déduire l'évolution moyenne associée à deux hausses successives, une première de 20 % et une deuxième de 15 %.

**EXERCICE 18**

1. Quels sont les coefficients multiplicateurs associés à une baisse de 30 % et à une baisse de 25 % ?
2. Déterminer la moyenne géométrique de 0,7 et 0,75.
3. En déduire l'évolution moyenne associée à deux baisses successives, une première de 30 % et une deuxième de 25 %.

**EXERCICE 19**

Chaque somme $S$ est la somme de termes successifs d'une suite géométrique $(u_n)$. Calculer $S$.

1. $S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2\,048$.
2. $S = 3 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{3}{8\,192}$.
3. $S = 2 + 6 + 18 + \ldots + 13\,122$.

**EXERCICE 20**

Une entreprise place un capital de 10 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Cela signifie que chaque année, le capital augmente de 3 %.

On note $C_n$ la valeur acquise par le capital au bout de $n$ années.

1. Calculer $C_1$ et $C_2$.
2. Indiquer la nature de la suite des capitaux $(C_n)$.
3. Exprimer le terme général $C_n$ en fonction de $n$.
4. Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 10 ans.

**EXERCICE 21**

En 2018, les dépenses de fonctionnement d'une entreprise s'élevaient à 12 500 euros. Depuis, elles diminuent de 5,5 % par an.

Le responsable veut savoir à partir de quelle année les dépenses de fonctionnement seront inférieures à 10 000 euros si la baisse se poursuit avec la même évolution annuelle.

Pour tout entier naturel $n$, on note $d_n$ les dépenses de fonctionnement l'année $2018+n$.

1. Préciser $d_0$, $d_1$ et $d_2$.
2. Déterminer la nature de la suite $(d_n)$.
3. Exprimer le terme général $d_n$ en fonction de $n$.
4. Conclure en utilisant une calculatrice.

**EXERCICE 22**

Un atelier fabrique 250 paires de lunettes par semaine. Au 1er janvier 2019, il reçoit une commande de 7 500 pièces pour début juin. Le chef d'atelier compte réaliser cette commande en 24 semaines.

1. Ce délai est-il suffisant ? Justifier la réponse.
2. Le chef d'atelier décide d'augmenter la production de 5 % par semaine. On note $u_n$ le nombre de paires de lunettes produites la $n$-ième semaine.
   - **a.** Calculer $u_1$ et $u_2$.
   - **b.** Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.
   - **c.** Exprimer le terme général $u_n$ en fonction de $n$.
3. Conclure.

**EXERCICE 23**

Un jour donné, la pression atmosphérique à l'altitude 0 est égale à 1 000 hectopascals (hPa) et diminue de 1 % pour une élévation d'altitude de 100 mètres.

Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la pression à $n$ centaines de mètres d'altitude.

1. Déterminer la pression atmosphérique à 100 m et à 200 m d'altitude.
2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire la pression atmosphérique au sommet du Mont-Blanc à 4 800 m ce jour-là.

**EXERCICE 24**

Étienne vient d'acheter un lave-linge très perfectionné à 1 500 euros qu'il décide d'assurer. En cas de défaillance, l'assureur rembourse l'appareil mais il applique une décote de 12 % par an sur la valeur de l'appareil. On note $a_n$ la valeur remboursée du lave-linge la $n$-ième année.

1. Calculer $a_1$ et $a_2$.
2. Quelle est la nature de la suite $(a_n)$ ?
3. Exprimer $a_n$ en fonction de $n$.
4. A partir de quelle année la valeur remboursée sera-t-elle inférieure à 100 euros ?

**EXERCICE 25**

**PARTIE A.**

En France depuis 2016, les ventes de véhicules hybrides ont fortement augmenté. Le tableau ci-dessous donne le nombre de véhicules hybrides vendus en France par année :

| Année | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|
| Nombre de véhicules | 7 420 | 11 010 | 15 350 |

1. Déterminer le pourcentage d'évolution entre 2016 et 2017, puis entre 2017 et 2018.
2. Déterminer la moyenne géométrique de 1,48 et 1,39.
3. Quel est le taux moyen annuel d'évolution entre 2016 et 2018 ?

**PARTIE B.**

On suppose qu'à partir de 2018, les ventes de voitures hybrides augmentent de 43 % par an et que cette évolution va se poursuivre.

On modélise par la suite $(u_n)$ l'évolution des ventes où la partie entière de $u_n$ représente le nombre de voitures hybrides vendues au cours de l'année $2018 + n$.

1. **a.** Que vaut $u_0$ ?
   **b.** Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
4. Selon ce modèle, combien de voitures hybrides seront vendues en 2023 ?

**EXERCICE 26**

Pour un emploi où elle compte rester 15 ans, Bahiya se voit proposer deux contrats de travail :

- **Contrat 1** : 21 000 euros de salaire annuel net et une augmentation annuelle de 1 000 euros ;
- **Contrat 2** : 18 000 euros de salaire annuel net et une augmentation annuelle de 8 %.

1. On commence par étudier le **contrat 1**.
   **a.** On note $u_n$ la valeur du salaire annuel de Bahiya la $n$-ième année.
   Déterminer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
   **b.** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
   **c.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   **d.** Calculer $u_{15}$.
2. On étudie maintenant le **contrat 2**.
   **a.** On note $v_n$ la valeur du salaire annuel de Bahiya la $n$-ième année.
   Déterminer $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
   **b.** Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?
   **c.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   **d.** Calculer $v_{15}$.
3. Comparer les deux contrats sur le long terme.

**EXERCICE 27**

L'entreprise Iron SA exploite un filon de minerai de fer depuis 1950.

La première année d'extraction l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer. Cependant depuis 1950, en raison de difficultés croissantes d'extraction, de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.

On appelle $T_n$ le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

*Les résultats seront arrondis à la tonne.*

1. Justifier que $T_1 = 19\,800$ puis calculer $T_2$ et $T_3$.
2. Exprimer $T_{n+1}$ en fonction de $T_n$.
3. Quelle est la nature de la suite $(T_n)$ ? En déduire l'expression de $T_n$ en fonction de $n$.
4. Quelle est la quantité extraite en 2008 ?
5. Montrer que la quantité totale extraite entre l'année 1950 et l'année $(1950 + n)$ est :

$$S_n = 2\,000\,000 \times \left(1 - 0{,}99^{n+1}\right)$$

6. En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 tonnes de métal. En quelle année, théoriquement, le filon sera-t-il épuisé ?

**EXERCICE 28**

*Cet exercice est composé de deux parties indépendantes l'une de l'autre.*

**PARTIE A. LES ÉCONOMIES**

Afin de se constituer un capital, un épargnant place 1 000 euros sur un compte non rémunéré et, chaque mois, verse 75 euros sur ce compte.

On note $u_n$ le montant en euros du capital accumulé au bout de $n$ mois. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ en justifiant la réponse.
3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

   Au bout de combien de temps le capital accumulé est-il supérieur à 3 500 euros ? Justifier la réponse.

**PARTIE B. LES DÉPENSES**

Cet épargnant doit surveiller ses dépenses. En janvier 2014 il a dépensé 660 € et, jusqu'à présent, ses dépenses ont augmenté chaque mois de 4 %. On suppose que cette évolution va se poursuivre à l'avenir.

Cette évolution conduit à modéliser le montant en euros des dépenses mensuelles au cours du $n$-ième mois après janvier 2014 par le terme $v_n$ d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 660$.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que $v_1 = 1{,}04\,v_0$. Calculer $v_3$ et interpréter le résultat.
2. Calculer le montant des dépenses au mois de décembre 2014.
3. Selon ce modèle, quand l'épargnant devrait-il doubler ses dépenses par rapport à janvier 2014 ?

**EXERCICE 29**

Deux coureurs cyclistes, Ugo et Vivien, ont programmé un entraînement hebdomadaire afin de se préparer à une course qui aura lieu dans quelques mois. Leur objectif est de parcourir chacun une distance totale de 1 500 km pendant leur période d'entraînement de 20 semaines.

Ugo commence son entraînement en parcourant 40 km la première semaine et prévoit d'augmenter cette distance de 5 km par semaine. Vivien commence son entraînement en parcourant 30 km la première semaine et prévoit d'augmenter cette distance de 10 % par semaine.

On note $u_n$ la distance, en kilomètres, parcourue par Ugo la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a ainsi $u_1 = 40$.

On note $v_n$ la distance, en kilomètres, parcourue par Vivien la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a ainsi $v_1 = 30$.

**PARTIE A. L'ENTRAÎNEMENT D'UGO**

1. Calculer les distances parcourues par Ugo au cours des deuxième et troisième semaines d'entraînement.
2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? Préciser sa raison.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 35 + 5n$.

**PARTIE B. L'ENTRAÎNEMENT DE VIVIEN**

1. Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ? Justifier la réponse.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = 30 \times 1{,}1^{n-1}$.
3. Calculer $v_8$. On arrondira le résultat au dixième.

**PARTIE C. COMPARAISON DES DEUX ENTRAÎNEMENTS**

1. Vivien est persuadé qu'il y aura une semaine où il parcourra une distance supérieure à celle parcourue par Ugo. Vivien a-t-il raison ? On pourra utiliser les **PARTIES A** et **B** pour justifier la réponse.
2. À la fin de la 17$^{\text{e}}$ semaine, les deux cyclistes se blessent. Ils décident alors de réduire leur entraînement. Ils ne feront plus que 80 km chacun par semaine à partir de la 18$^{\text{e}}$ semaine. Leur objectif sera-t-il atteint ?

**EXERCICE 30**

Un youtubeur compte 35 000 abonnés à sa chaîne au 1$^{\text{er}}$ janvier 2019.

Au cours de l'année 2019, il constate que chaque mois, il perd 20 % des anciens abonnés mais qu'il en gagne 500 nouveaux.

Pour $n \geqslant 1$, on note $u_n$ le nombre d'abonnés le 1$^{\text{er}}$ du $n$-ième mois, le premier mois étant le mois de janvier 2019.

1. Préciser $u_1$.
2. Calculer $u_2$ et $u_3$.
3. La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
4. On introduit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - 500$.
   - **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique.
     Préciser sa raison et son premier terme.
   - **b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   - **c.** Déterminer le nombre d'abonnés au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020.