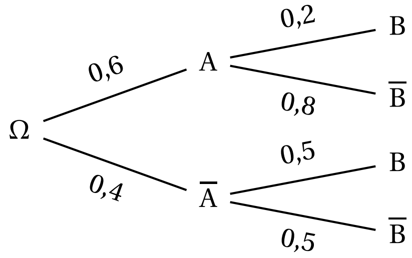
PROBABILITÉS

EXERCICE 1

Grâce à l'arbre ci-contre, donner les probabilités :

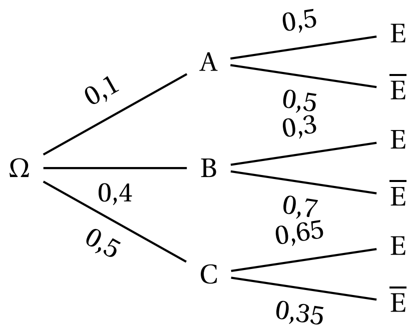
- $p(\mathrm{A})$;
- $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$;
- $p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})$;
- $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})$.



EXERCICE 2

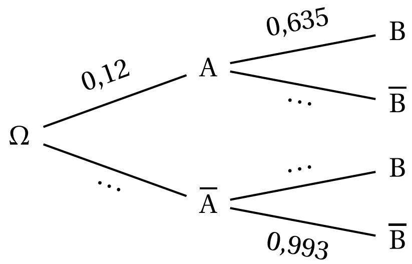
Grâce à l'arbre ci-contre, donner les probabilités :

- $p(\mathrm{A})$;
- $p(\mathrm{B})$;
- $p(\mathrm{C})$;
- $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})$;
- $p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{E}})$;



EXERCICE 3

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre.
2. Donner la probabilité de A.
3. Donner la probabilité de B sachant A.
4. Donner la probabilité de $\overline{\mathrm{B}}$ sachant A.
5. Calculer $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$.



EXERCICE 4

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et 2 boules noires. On tire successivement deux boules de l'urne.

On considère les événements :

- R : « La boule tirée est rouge ».
- V : « La boule tirée est verte ».
- N : « La boule tirée est noire ».

1. Schématiser l'expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

EXERCICE 5

Une agence de voyage, propose un itinéraire touristique pour lequel chaque voyageur effectue un aller-retour en utilisant soit le train, soit le bus. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.

- À l'aller, le train est choisi dans 70 % des cas.
- Lorsque le train a été choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
- Lorsque le bus a été choisi à l'aller, le train est préféré pour le retour dans 80 % des cas.

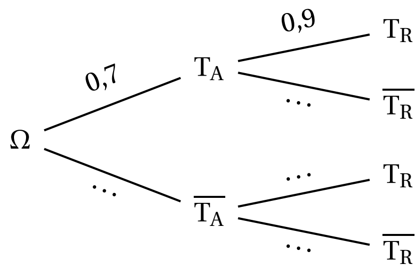
On interroge au hasard un voyageur.

Pour tout événement E, on note $\overline{\text{E}}$ son événement contraire et $p(\text{E})$ sa probabilité.

On considère les événements :

- T_A : « Le voyageur choisit de faire l'aller en train ».
- T_R : « Le voyageur choisit de faire le retour en train ».

Pour répondre aux questions posées, on pourra compléter l'arbre ci-dessous et s'en aider.



1. Calculer la probabilité que le voyageur fasse le retour en bus sachant qu'il a fait l'aller en train.
2. Calculer la probabilité que le voyageur fasse l'aller-retour en train.
3. Calculer la probabilité que le voyageur utilise le bus pour le retour.
4. Calculer la probabilité que le voyageur utilise les deux moyens de transport proposés.

EXERCICE 6

Une agence de voyage ne propose que trois destinations : les Antilles, Cuba, et les Maldives. Elle souhaite évaluer le niveau de satisfaction de ses clients. Elle sait que :

- 79 % des clients partent aux Antilles et 95 % d'entre eux sont satisfaits de leur séjour.
- 12 % des clients partent à Cuba et 93 % d'entre eux sont satisfaits de leur séjour.
- 9 % des clients partent aux Maldives et 98 % d'entre eux sont satisfaits de leur séjour.

On considère les événements :

- A : « Le client est parti aux Antilles ».
- C : « Le client est parti à Cuba ».
- M : « Le client est parti aux Maldives ».
- S : « Le client est satisfait ».

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. On interroge un client au hasard. Déterminer la probabilité qu'il ne soit pas satisfait de son séjour.

EXERCICE 7

Tous les cinq ans, l'établissement INVS (Institut national de veille sanitaire) réalise une enquête sur les infections nosocomiales (infections contractées au cours d'une hospitalisation).

Lors de la dernière enquête, on a obtenu les résultats suivants :

- 53 % des personnes hospitalisées étaient âgées de 66 ans ou plus. Parmi elles, 6,4 % ont été atteints par une infection nosocomiale.
- 6 % des personnes hospitalisées étaient âgées de 14 ans ou moins. Parmi elles, 2,4 % ont été atteints par une infection nosocomiale.
- Parmi les patients âgés de 15 à 65 ans, 3,7 % ont été atteints par une infection nosocomiale.

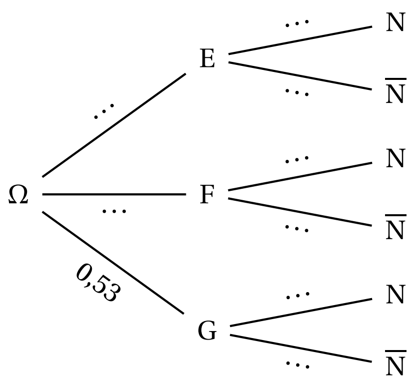
On choisit au hasard une personne parmi celles qui ont participé à cette enquête.

On considère les événements :

- E : « La personne est âgée de 0 à 14 ans ».
- F : « La personne est âgée de 15 à 65 ans ».
- G : « La personne est âgée de plus de 65 ans ».
- N : « La personne est atteinte par une infection nosocomiale ».

Pour tout événement A, on notera $p(\mathrm{A})$ sa probabilité et $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement contraire de A.

1. En utilisant les données de l'énoncé, compléter l'arbre de probabilités :
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité de contracter une infection nosocomiale est 0,051.
3. Un lecteur de l'enquête affirme qu'un patient victime d'une infection nosocomiale a plus de trois chances sur quatre d'être une personne âgée de plus de 65 ans. A-t-il raison ? Justifier.



EXERCICE 8

Dans une association culturelle, un tiers des femmes et un quart des hommes sont dans l'orchestre. On sait également que 30 % des membres de l'association sont dans l'orchestre.

On choisit au hasard un membre et on note :

- F l'événement : « Le membre choisi est une femme ».
- H l'événement : « Le membre choisi est dans l'orchestre ».

1. Construire un arbre pondéré.
2. Déterminer $p(\mathrm{F})$.
3. On choisit un membre parmi les musiciens de l'orchestre. Quelle est la probabilité que ce musicien soit une femme ?

EXERCICE 9

En France, pour chaque naissance, la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon est 0,51.

1. Un couple souhaite avoir deux enfants. Quelle est la probabilité que ce couple ait deux garçons puis celle qu'il ait trois filles ?
2. Un autre couple souhaite avoir trois enfants. Quelle est la probabilité que ce couple ait trois garçons ?

EXERCICE 10

Pour connaître la fréquentation d'un restaurant gastronomique, une enquête a été menée auprès des habitants de la commune dans laquelle il se trouve. La répartition des personnes interrogées est la suivante :

- 10 % ont moins de 30 ans.
- 40 % ont entre 30 et 50 ans.
- 50 % ont plus de 50 ans.

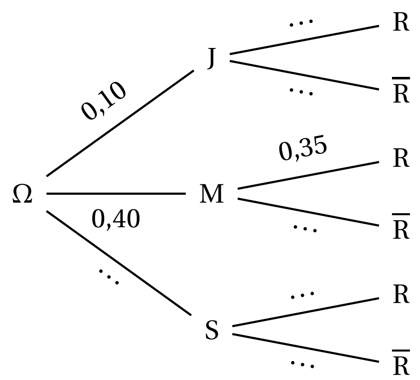
A la question : « Avez-vous déjà mangé dans ce restaurant ? »

- 20 % des moins de 30 ans ont répondu « oui ».
- 35 % des personnes âgées entre 30 et 50 ans ont répondu « oui ».
- 45 % des plus de 50 ans ont répondu « oui ».

On prend au hasard l'une des réponses de cette enquête.

- On note J l'événement : « La personne interrogée a moins de 30 ans ».
- On note M l'événement : « La personne interrogée a un âge compris entre 30 et 50 ans ».
- On note S l'événement : « La personne interrogée a plus de 50 ans ».
- On note R l'événement : « La personne interrogée a déjà mangé dans ce restaurant ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. **a.** Calculer la probabilité de l'événement « la personne interrogée a moins de 30 ans et a déjà mangé dans ce restaurant ».

b. Calculer la probabilité de l'événement « la personne interrogée a un âge compris entre 30 et 50 ans et a déjà mangé dans ce restaurant ».

3. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait déjà mangé dans ce restaurant est égale à 0,385.

4. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 30 ans, sachant qu'elle a déjà mangé dans ce restaurant.

5. On sait que 2 000 habitants de la commune dans laquelle se trouve le restaurant gastronomique ont répondu à l'enquête de fréquentation et 38,5 % des personnes interrogées déclarent avoir mangé dans ce restaurant.

Le restaurateur prétend que 40 % des habitants de la commune fréquentent son restaurant.

a. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Rappel : L'intervalle centré $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % utilisable pour des échantillons de taille $n \geqslant 25$ et des proportions p du caractère comprises entre 0,2 et 0,8.

b. Que pensez-vous de l'affirmation du restaurateur ?

EXERCICE 11

Un salon de thé propose deux types de desserts : des gaufres et des parts de tarte maison.

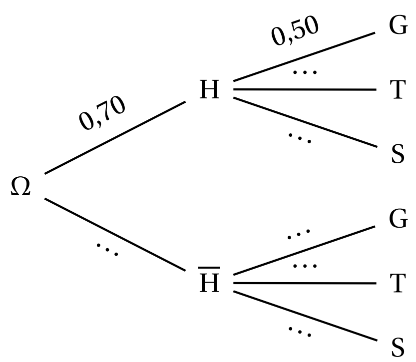
La gérante a remarqué que :

- 70 % des clients prennent une boisson chaude, les autres prennent une boisson froide.
- Parmi les clients prenant une boisson chaude, 50 % prennent une gaufre, 30 % une part de tarte et les autres ne prennent pas de dessert.
- Parmi les clients prenant une boisson froide, 70 % prennent une gaufre, 20 % une part de tarte et les autres ne prennent pas de dessert.
- Aucun client ne prend plusieurs desserts.

On interroge au hasard un client de ce salon de thé. On considère les événements suivants :

- H : « Le client prend une boisson chaude ».
- G : « Le client prend une gaufre ».
- T : « Le client prend une part de tarte ».
- S : « Le client ne prend pas de dessert ».

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre :
2. Traduire par une phrase l'événement $H \cap G$, puis calculer sa probabilité.
3. Montrer que la probabilité que le client prenne une gaufre est égale à 0,56.
4. Sachant que le client prend une gaufre, quelle est la probabilité qu'il prenne une boisson chaude ?



EXERCICE 12

Un restaurant réalise une étude statistique sur la consommation de ses clients. Les clients de ce restaurant peuvent choisir un menu ou commander leur repas à la carte. D'après cette étude, on constate que 60 % des clients choisissent un menu, tandis que les autres préfèrent choisir à la carte.

À l'issue du repas, le serveur propose systématiquement aux clients de prendre un café. L'étude montre que 90 % des clients qui ont choisi un menu et 70 % de ceux qui ont commandé à la carte prennent un café.

On choisit un client au hasard parmi ceux qui ont fréquenté le restaurant dans l'année.

On définit les événements suivants :

- M : « Le client choisit un menu ».
- C : « Le client prend un café ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que le client choisisse un menu et prenne un café.
3. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,82.
4. Sachant que le client prendra un café, quelle est la probabilité qu'il choisisse le menu ?

   On arrondira la réponse au centième.

EXERCICE 13

Un jeu consiste à lancer un dé cubique équilibré puis à tirer une boule dans une urne.

Si on obtient 6 au lancer du dé, on tire une boule dans l'urne A; si on obtient un nombre impair, on tire dans l'urne B; dans les autres cas, on tire dans l'urne C.

L'urne A contient 1 boule rouge et 5 boules vertes; l'urne B contient 2 boules rouges et 8 boules vertes; l'urne C contient 3 boules rouges et 11 boules vertes.

On considère les événements suivants :

- I : « Obtenir un nombre impair ».
- S : « Obtenir 6 ».
- A : « Obtenir 2 ou 4 ».
- R : « La boule tirée est rouge ».
- V : « La boule tirée est verte ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge.
3. Déterminer la probabilité que la boule provienne de l'urne A sachant qu'elle est rouge.

EXERCICE 14

1. Andrew a révisé 15 des 25 thèmes pour préparer une épreuve orale. Lors de cette épreuve, l'étudiant tire deux sujets au hasard, puis choisit l'un des deux sujets.

   Quelle est la probabilité qu'Andrew soit interrogé sur un thème qu'il ne maîtrise pas?
2. 75 % des étudiants ont préparé l'épreuve écrite. Si un étudiant a préparé l'examen, il a 85 % de chance de réussite à l'examen et 15 % s'il ne l'a pas du tout préparé.

   On interroge au hasard un étudiant.

   a. Quelle est la probabilité qu'il réussisse sont examen?

   b. Quelle est la probabilité pour un étudiant ayant réussi l'examen de l'avoir préparé?

EXERCICE 15

J'habite dans une ville où il pleut un jour sur trois.

S'il pleut, il y a une chance sur deux que le trafic soit dense et une chance sur quatre qu'il le soit quand il ne pleut pas.

Si le trafic est dense et s'il pleut, j'arrive en retard dans un cas sur deux. La probabilité que j'arrive en retard est de $\frac{1}{16}$ s'il ne pleut pas et si le trafic n'est pas dense. Dans tous les autres cas, la probabilité que je sois en retard est égale à $\frac{1}{8}$.

On considère les événements suivants :

- P : « Il pleut ».
- D : « Le trafic est dense ».
- R : « Je suis en retard ».

On choisit un jour au hasard.

1. Représenter un arbre correspondant à cette situation.
2. Déterminer la probabilité que j'arrive en retard.
3. Si j'arrive en retard, déterminer la probabilité qu'il pleuve.

EXERCICE 16

Samia a lu dans un article qu'il n'existe pas de femmes daltoniennes. En utilisant les informations données ci-dessous, confirmer ou infirmer cette affirmation.

Dans la population française, il y environ 48 % d'hommes et 4 % de daltoniens. Parmi les hommes, on estime à 8 % le nombre de daltoniens.

On interroge une personne au hasard.

On considère les événements D : « La personne interrogée est daltonienne » et H : « La personne interrogée est un homme ».

EXERCICE 17

Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. Celui-ci effectue une première sélection sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.

Les candidats sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.

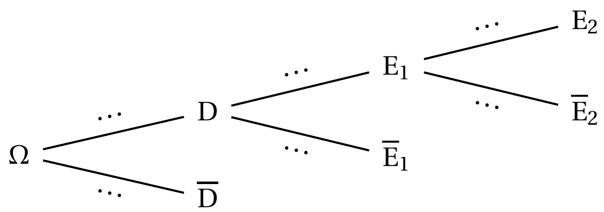
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrute 25 % des candidats rencontrés.

On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

- D : « Le candidat est retenu sur dossier ».
- E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien ».
- E_2 : « Le candidat est recruté ».

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   b. On note F l'événement : « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Leurs dossiers sont étudiés indépendamment les uns des autres.

   Déterminer la probabilité qu'au moins l'un des cinq amis soit recruté.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 18

On considère deux événements A et B tels que $p(\mathrm{A}) = 0{,}3$ et $p(\mathrm{B}) = 0{,}5$.

Déterminer la probabilité de $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ dans chacun des cas suivants :

1. A et B sont indépendants.
2. A et B sont incompatibles.

EXERCICE 19

On considère deux événements A et B tels que $p(\text{A}) = 0{,}7$; $p(\text{B}) = 0{,}5$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = 1$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

EXERCICE 20

On considère deux événements indépendants A et B tels que $p(\text{A}) = 0{,}3$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0{,}65$.

Déterminer $p(\text{B})$.

EXERCICE 21

Dans chacun des cas suivants, indiquer si les événements A et B sont indépendants.

1. $p(\text{A}) = 0{,}7$; $p(\text{B}) = 0{,}5$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0{,}8$.
2. $p(\text{A}) = 0{,}7$; $p(\text{B}) = 0{,}4$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0{,}82$.
3. $p(\text{A}) = 0{,}4$; $p(\text{B}) = 0{,}5$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}2$.

EXERCICE 22

Une urne opaque contient 2 boules noires et 9 boules blanches, toutes indiscernables au toucher. On tire successivement deux boules de cette urne.

On note A l'événement : « La première boule tirée est noire ».

On note B l'événement : « La deuxième boule tirée est noire ».

1. Le tirage est réalisé sans remise.
   - **a.** Faire un arbre pondéré représentant cette situation.
   - **b.** Déterminer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.
2. Le tirage est réalisé avec remise.
   - **a.** Justifier que A et B sont indépendants.
   - **b.** Faire un arbre pondéré représentant cette situation.
   - **c.** Déterminer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

EXERCICE 23

Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « Il n'entend pas son réveil sonner ».
- B : « Son bus est en retard ».

Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0,05 et que celle de B est égale à 0,1.

Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée, sinon il est à l'heure.

1. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que le bus soit en retard.
2. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe.
3. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend 5 fois au lycée. On suppose que tous les jours sont indépendants les uns des autres.

   Déterminer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée tous les jours de la semaine.

EXERCICE 24

Mattéo, Anne, Irène et Line partent faire du camping ensemble.

Pour la corvée de vaisselle, ils décident de tirer au sort avec des allumettes : celui qui tire l'allumette la plus courte fait la vaisselle.

Line est mécontente car elle affirme qu'en tirant toujours la dernière, elle a plus de chance de faire la vaisselle.

Lui donnez-vous raison ?

EXERCICE 25

Dans la population française, une maladie touche une personne sur 10 000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient promouvoir son nouveau test de dépistage :

- Si une personne est malade, le test est positif dans 99 % des cas.
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas.

On appelle « valeur prédicative du test » la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

Que pensez-vous de l'efficacité de ce test ?

EXERCICE 26

John and Meghan made cookies and muffins at Jane's tea. John's box contains 6 cookies and 5 muffins when Meghan's contains 12 cookies and 3 muffins. Jane chooses a box and a cake randomly.

What is the probability that it is a muffin ?

EXERCICE 27

Un site internet propose un jeu :

- Si le joueur gagne la partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $\frac{2}{5}$.
- Si le joueur perd la partie, la probabilité qu'il perde la suivante est $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'événement : « L'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n sa probabilité.

L'internaute gagne toujours la première partie de sorte que $p_1 = 1$.

1. Déterminer p_3. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.
   - **a.** Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
   - **b.** Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis celle de p_n.
   - **c.** Quel est le comportement de p_n pour des valeurs de n de plus en plus grandes ?