OPTIMISATION LINÉAIRE

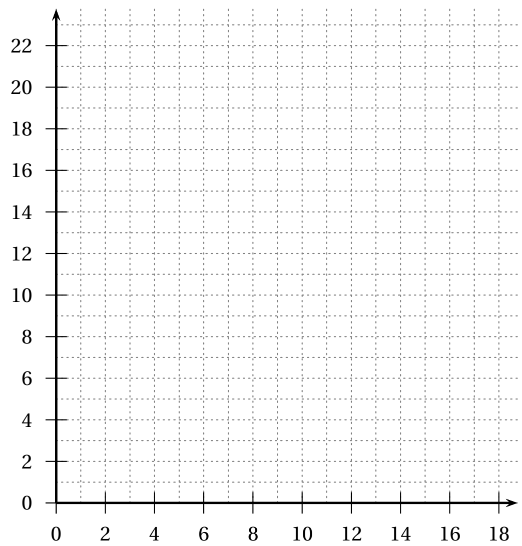
EXERCICE 1

Un restaurateur veut acheter des tables et des chaises pour son restaurant.

- Il veut au moins 15 tables et 70 chaises.
- Un fournisseur A lui propose un lot de 1 table et 6 chaises pour 75 €.
- Un fournisseur B lui propose un lot de 1 table et 4 chaises pour 60 €.

On désigne par x le nombre de lots A et y le nombre de lots B achetés par le restaurateur.

1. Tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = -x + 15$ et $y = -1{,}5x + 17{,}5$ dans un repère comme ci-dessous.



2. On considère le système d'inéquations (S) : $\begin{cases} x+y \geqslant 15 \\ 3x+2y \geqslant 35 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

   Vérifier que les contraintes sur x et y pour qu'il y ait suffisamment de tables et de chaises se traduisent par le système (S) avec x et y entiers.

3. Dans le repère, déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) en hachurant la partie du plan qui ne convient pas.

4. On note C le coût de x lots A et y lots B.

   a. Exprimer C en fonction de x et de y.

   b. Montrer que $y = -\dfrac{5}{4}x + 19$ est une équation de la droite (d) correspondant à un coût C de 1 140 €.

   c. Tracer (d) dans le repère.

   d. Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B à acheter pour que le coût soit minimum.
   Quel est ce coût minimum ?

EXERCICE 2

Pour un mariage, un traiteur souhaite proposer deux desserts à ses clients.

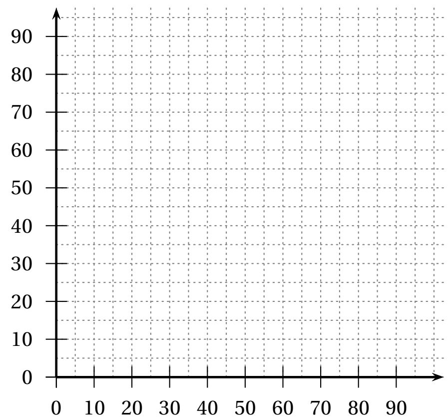
- La réalisation du dessert A nécessite 10 € de matière première et 3 heures de fabrication.
- La réalisation du dessert B nécessite 20 € de matière première et 1,5 heures de fabrication.
- Le traiteur dispose d'un budget pour les matières premières limité à 700 €, et il dispose d'au plus 120 heures de travail.

1. Soit x le nombre de desserts A proposés et y le nombre de desserts B proposés.

Expliquer pourquoi x et y satisfont le système d'inéquations suivants :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ y & \leqslant & -\dfrac{1}{2}x+35 \\ y & \leqslant & -2x+80 \end{array}\right.$$

2. a. Tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y=-\dfrac{1}{2}x+35$ et $y=-2x+80$ dans un repère comme ci-dessous.



b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection de (d_1) et (d_2).

3. Déterminer graphiquement l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\left(x\ ;\ y\right)$ vérifient le système (S). *On hachurera les parties du plan qui ne sont pas solutions.*

4. Le traiteur peut-il proposer à ses clients 25 desserts A et 20 desserts B ? 20 desserts A et 30 desserts B ?

5. Les bénéfices réalisés par le traiteur sont de 6 € par dessert A et 8 € par dessert B.

a. Expliquer pourquoi le bénéfice total b vérifie $b=6x+8y$.

b. Tracer la droite (d_{240}) qui correspond à un bénéfice total de 240 €.
Ce bénéfice est-il réalisable par le traiteur ?
Justifier votre réponse.

c. Tracer la droite (d_{400}) qui correspond à un bénéfice total de 400 €.
Ce bénéfice est-il réalisable par le traiteur ?
Si oui, donner un exemple de répartition du nombre de desserts A et B permettant ce bénéfice. Si non, justifier la réponse.

d. En déduire le nombre de desserts A et de desserts B à fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal.
Calculer ce bénéfice maximal.

EXERCICE 3

La directrice d'un hôtel restaurant situé dans la baie du Mont-Saint-Michel organise un évènement promotionnel afin de faire connaître son établissement.

Durant une semaine, elle souhaite que le même message publicitaire soit diffusé plusieurs fois sur les deux radios locales entre l7h et 19h afin d'atteindre les personnes rentrant du travail.

Elle se renseigne donc sur les tarifs proposés par ces deux radios locales.

- Normand'FM demande 60 euros pour chaque diffusion du message.
- Bret'FM, plus écoutée, réclame 150 euros pour chaque diffusion du message.

La directrice dispose, pour cette semaine de campagne publicitaire, d'un budget de 2 400 euros. Elle souhaite que, sur cette période, le message soit diffusé au moins vingt fois.

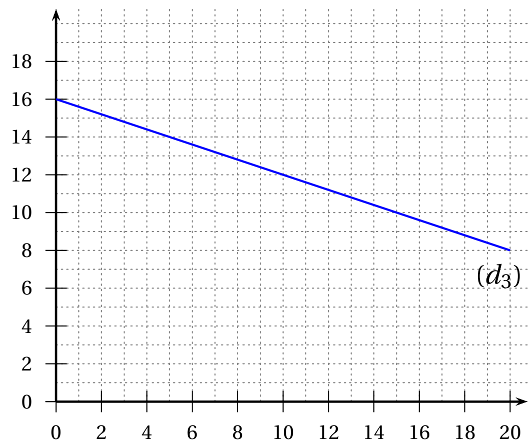
Elle souhaite également que le nombre des messages diffusés sur Bret'FM soit supérieur ou égal à celui des messages diffusés sur Normand'FM.

1. Notons x et y les nombres de messages diffusés respectivement sur Normand'FM et sur Bret'FM durant cette semaine. On admet que x et y sont des entiers positifs qui satisfont le système suivant :

$$(S) : \left\{\begin{array}{lll} y & \geqslant & x \\ y & \geqslant & 20 - x \\ y & \leqslant & 16 - 0,4x \end{array}\right.$$

   Expliquer ce que traduit chacune des trois inégalités précédentes à l'aide des données de l'énoncé.

2. La droite (d_3) d'équation : $y = 16 - 0,4x$ est déjà représentée dans le repère ci-dessous.



   Dans ce même repère, tracer la droite (d_1) d'équation $y = x$ et la droite (d_2) d'équation $y = 20 - x$.

3. Hachurer les parties du plan comportant les points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ ne sont pas solutions du système (S).

4. Déterminer par lecture graphique les 8 couples d'entiers positifs solutions du système (S).

5. On estime que, pendant la semaine de diffusion, le nombre d'auditeurs entre l7h et 19h sera de 21 500 sur Normand'FM et de 35 000 sur Bret'FM.

   a. Calculer le nombre total d'écoutes du message publicitaire durant la semaine lorsque 8 messages sont diffusés sur Normand'FM et 12 sur Bret'FM.

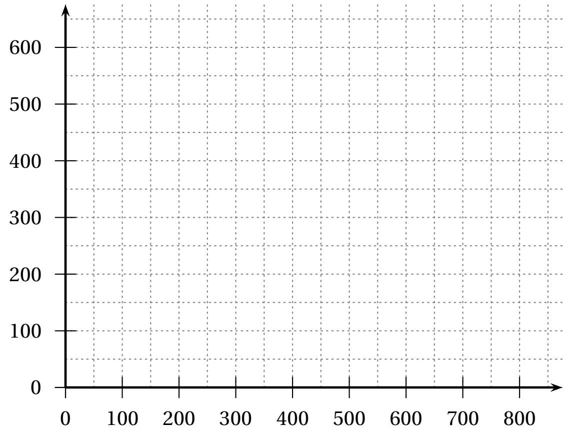
   b. Parmi l'ensemble des possibilités offertes à la directrice, solutions du système (S), laquelle peut-on lui conseiller afin d'assurer un nombre maximal d'écoutes du message publicitaire ? Expliciter la démarche mise en oeuvre.

EXERCICE 4

Dans cet exercice, l'unité monétaire est le franc F.

1. **a.** Dans un repère comme ci-dessous, construire les droites (d_1) ; (d_2) et (d_3) d'équations respectives : $x + y = 500$; $x + 2y = 750$ et $x + 1,5y = 600$.

   On se limitera aux points d'abscisses positives.



   b. Déterminer par un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (d_1) et (d_3).

2. Un service de restauration rapide propose deux types de sandwiches au fromage :
   - Le mini composé de : 1 pain rond, 40 g de steak hache et 1 tranche de fromage de 20 g.
   - Le maxi composé de 1 pain rond, 60 g de steak haché et 2 tranches de fromage de 20 g chacune.

   On note x le nombre de mini sandwiches et y celui de maxi sandwiches vendus par jour.

   a. On dispose chaque jour au maximum de 500 pains, de 24 kg de steak et de 15 kg de fromage.

   Montrer que cette contrainte se traduit par le système d'inéquations :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x + y & \leqslant & 500 \\ x + 2y & \leqslant & 750 \\ x + 1,5y & \leqslant & 600 \end{array}\right.$$

   b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points vérifiant ce système.

   Justifier la démarche.

   c. Peut-on vendre chaque jour :
   - 350 mini sandwiches et 125 maxi ?
   - 300 mini sandwiches et 200 maxi ?
   - 250 mini sandwiches et 250 maxi ?

   d. On réalise un bénéfice de 6 F sur un mini sandwich et de 8 F sur la vente d'un maxi.

   Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice total réalisé par jour $B(x, y)$.

   e. Représenter les droites correspondant respectivement à un bénéfice de 2 400 F ; à un bénéfice de 3 400 F et à un bénéfice de 3 600 F.

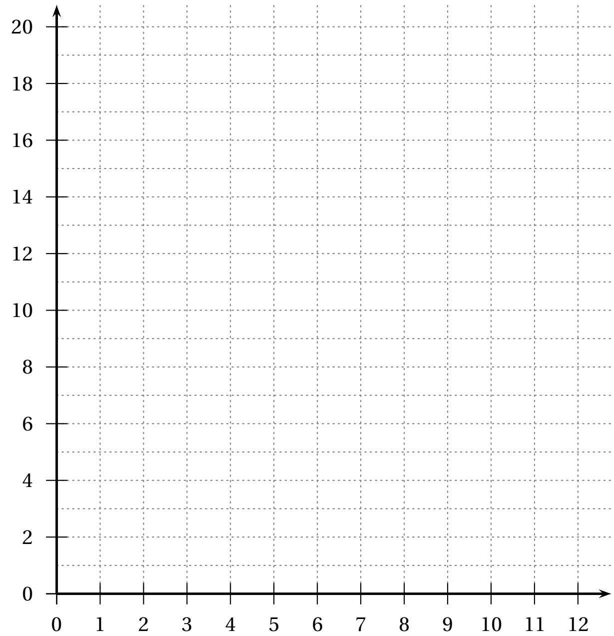
   En déduire en justifiant le nombre de mini sandwiches et de maxi sandwiches à vendre par jour pour obtenir un bénéfice maximal que l'on calculera.

EXERCICE 5

Dans cet exercice, l'unité monétaire est le franc F.

1. **a.** Dans un repère comme ci-dessous, construire les droites (d_1) ; (d_2) et (d_3) d'équations respectives : $2x + y = 10$; $4x + 3y = 50$ et $2x + y = 20$.

On se limitera aux points d'abscisses positives.



b. Déterminer par un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (d_2) et (d_3).

2. Un restaurateur veut acheter, pour sa salle de restaurant d'une surface de 100 m^2, des tables rondes et des tables carrées.

- Une table ronde permet de servir 8 couverts, occupe 8 m^2 et coûte 3 000 F.
- Une table carrée permet de servir 4 couverts, occupe 6 m^2 et coûte 1 500 F.
- Le restaurateur dispose d'un budget de 30 000 F et veut servir au moins 40 couverts.

On note x le nombre de tables rondes et y le nombre de tables carrées qu'il veut acheter.

a. Exprimer, à l'aide d'un système d'inégalités sur x et y, les contraintes imposées par l'énoncé.

b. Déterminer graphiquement l'ensemble S des points du plan dont les coordonnées $\left(x\ ;\ y\right)$ vérifient le système obtenu.

On hachurera la partie du plan qui n'est pas solution.

c. On suppose que les tables sont complètement occupées.

Les tables rondes laissent alors chacune un bénéfice de 400 F au restaurateur et les tables carrées chacune un bénéfice de 250 F.

Exprimer en fonction de x et y le bénéfice total $B(x, y)$ en F réalisé.

3. **a.** Représenter les droites b_1 et b_2 obtenus pour un bénéfice respectivement de 3 500 F et 4 500 F.

b. Peut-on avoir un bénéfice de 6 000 F ?

c. Quel est le bénéfice maximal et quels sont alors les nombres de tables que le restaurateur doit acheter ?

On justifiera la méthode utilisée.