FONCTIONS EXPONENTIELLES

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$.

1. Indiquer le sens de variations de la fonction f.
2. Compléter le tableau en arrondissant à 10^{-3} :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$									

EXERCICE 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0{,}5^x$.

1. Indiquer le sens de variations de la fonction g.
2. Compléter le tableau en arrondissant à 10^{-3} :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$g(x)$									

EXERCICE 3

Au 1er janvier 2019, la France compte 66,9 millions d'habitants. On estime son taux de croissance annuel à 0,4 %.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de millions d'habitants en France au 1er janvier de l'année $2019 + n$ et on admet que la suite (u_n) est une suite géométrique.

1. **a.** Donner la raison de la suite (u_n).
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
2. **a.** Proposer l'expression d'une fonction f permettant d'exprimer le nombre de millions d'habitants en France x années après le 1er janvier 2019, x étant un nombre réel.
   b. Déterminer, selon ce modèle, le nombre d'habitants en France au 1er janvier 2022, 1er juillet 2023 et au 1er octobre 2025.

EXERCICE 4

Lors du test d'un produit antibactérien, le nombre de bactéries dans une solution, en million, est donné en fonction du temps t, en heure, par la fonction n définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par $n(t) = 98 \times 0{,}84^t$.

1. Déterminer la quantité de bactéries initiale puis au bout de 3 heures et demi.
2. Quel est le taux d'évolution horaire du nombre de bactéries.

EXERCICE 5

1. Déterminer le sens de variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   a. $t \longmapsto -2 \times 1{,}4^t$ **b.** $t \longmapsto 9{,}85 \times 0{,}85^t$ **c.** $t \longmapsto 0{,}8 \times 2{,}25^t$

2. Déterminer le sens de variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   a. $x \longmapsto \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^x$ **b.** $x \longmapsto 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^x$ **c.** $x \longmapsto -\frac{7}{12} \times \left(\frac{2\,020}{2\,019}\right)^x$

EXERCICE 6

Le nombre de joueurs à un jeu vidéo, en milliers, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ par $f(x) = 65 \times 1{,}05^x$, où x est le nombre de mois écoulés depuis le lancement du jeu.

Au bout de combien de temps, en mois et en jour, atteindra-t-on 100 milliers de joueurs ?

EXERCICE 7

La pression atmosphérique est égale à 1 013 hPa (hectoPascal) au niveau de la mer, et diminue régulièrement de 12 % à chaque fois que l'on monte de 1 000 mètres.

Il s'agit d'une décroissance exponentielle.

On peut la modéliser par une fonction P de l'altitude h en milliers de mètres vérifiant :

$$P(h) = k \times a^h$$

1. Déterminer les constantes k et a.
2. Calculer la pression à 5 500 m d'altitude à 1 hPa près.

EXERCICE 8

La température T (en °C) d'une tasse de café que l'on laisse refroidir après l'avoir sortie d'un four à micro-ondes diminue en fonction du temps t (en minute) suivant la formule :

$$T(t) = 21 + 65 \times 0{,}9^t$$

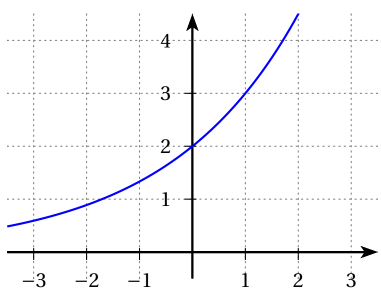
1. Quelle est la température du café à sa sortie du four puis au bout de 5 minutes ?
2. Combien de temps doit attendre une personne qui aime boire son café à 55 °C ?
3. Quelle semble être la température de la pièce ?

EXERCICE 9

On a représenté une fonction f du type :

$$x \longmapsto k \times a^x$$

Déterminer les valeurs de k et de a en utilisant le graphique.



EXERCICE 10

1. Quelle est le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}01^x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1{,}01^x > 1{,}01^{3{,}5}$.

EXERCICE 11

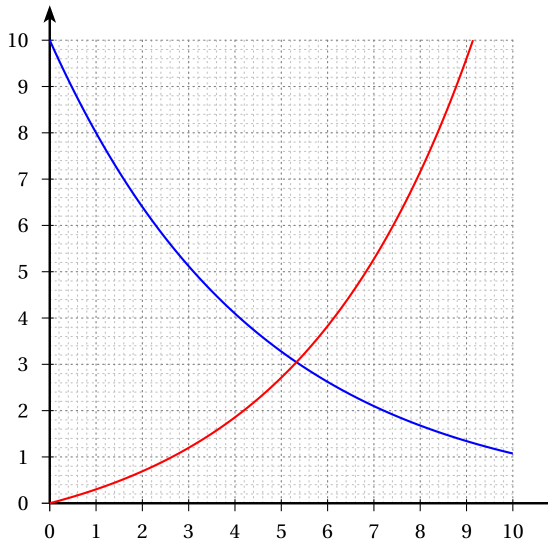
1. Quelle est le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}33^x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $0{,}33^x \leqslant 0{,}33^{1{,}8}$.

EXERCICE 12

L'offre o et la demande d pour un produit (en milliers d'unités)sont modélisées par deux fonctions du prix de vente x (en euros).

Pour tout réel $x \in [0\,;\,10]$, on a $o(x) = 1{,}3^x - 1$ et $d(x) = 10 \times 0{,}8^x$.

1. Calculer $o(2)$ et $d(2)$ et interpréter les résultats.
2. Déterminer le sens de variations des fonctions o et d.
3. On donne les représentations graphiques des fonctions o et d.



   a. Donner par lecture graphique le montant de l'offre correspondant à un prix de vente de 5 euros.

   b. Utiliser ce graphique pour trouver le prix d'équilibre, où l'offre est égale à la demande.

4. Retrouver à l'aide de la calculatrice le prix d'équilibre au centime près.

EXERCICE 13

Écrire sous la forme d'une seule puissance de 2 :

1. $a = 2^{1{,}5} \times 2^{-3}$ 2. $b = \left(2^{4{,}5}\right)^3$ 3. $c = 2^3 \times 4^2$ 4. $d = \dfrac{2^5}{4}$

EXERCICE 14

Simplifier les expressions suivantes puis calculer leur valeur :

1. $a = 5^{1,7} \times 5^{1,3}$ **2.** $b = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6$ **3.** $c = 4^{-0,7} \times \times \dfrac{1}{4^{0,3}}$ **4.** $d = \dfrac{6^{4,5} \times 6^{2,3}}{\left(6^{1,6}\right)^3}$

EXERCICE 15

1. Calculer de tête :

- $64^{\frac{1}{2}}$
- $64^{\frac{1}{3}}$
- $81^{\frac{1}{4}}$
- $1\,024^{\frac{1}{10}}$

2. A l'aide de la calculatrice, calculer à 10^{-4} près :

- $1{,}20^{\frac{1}{2}}$
- $1{,}20^{\frac{1}{12}}$
- $1{,}20^{\frac{1}{360}}$
- $0{,}90^{\frac{1}{4}}$

EXERCICE 16

Le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 38 % en trois ans.
Calculer l'augmentation annuelle moyenne du chiffre d'affaires à 0,1 % près.

EXERCICE 17

La taxe foncière en France a augmenté en moyenne de 21,26 % en cinq ans, de 2008 à 2013.
Déterminer son augmentation annuelle moyenne à 0,1 % près.

EXERCICE 18

1. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ les équations suivantes :

- $x^{0,25} = 4$
- $x^{0,1} = 3$
- $x^{0,5} = 2{,}5$
- $x^{\frac{1}{3}} = 10$

2. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ les équations suivantes :

- $x^{-0,2} = 3$
- $x^{-\frac{1}{6}} = 2$
- $x^{-0,25} = 5$
- $x^{-\frac{1}{4}} = 1{,}5$

3. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ les inéquations suivantes :

- $x^{0,5} < 5$
- $x^{0,2} \geqslant 2$
- $x^{\frac{1}{5}} \leqslant 3$
- $x^{\frac{2}{3}} < 4$

EXERCICE 19

1. **a.** Calculer le taux mensuel t_{m} équivalent à un taux annuel $t_{\text{a}} = +6$ %.
b. Calculer le taux journalier t_{j} équivalent à un taux annuel $t_{\text{a}} = +6$ %.
On considère qu'une année comprend 360 jours.

2. Un capital de 10 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel $t_{\text{a}} = +6$ %.

a. Quelle est la valeur du capital au bout de 1 an ?
b. Quelle est la valeur du capital au bout de 1 mois ? au bout de 3 mois ?
c. Quelle est la valeur du capital au bout de 1 jour ? au bout de 45 jours ?

EXERCICE 20

On modélise la population de la ville de Nohouaire depuis 2010 par la fonction p définie par

$$p(x) = 12 \times 2^{\frac{x}{18}}$$

où $p(x)$ est la population en milliers d'habitants l'année $2010 + x$.

1. Quelle était la population en 2010 et 2020 ?
2. En quelle année, selon ce modèle, la population dépassera-t-elle 20 000 habitants.
3. Montrer que : $p(x+18) = 2 \times p(x)$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 21

Le nombre d'adhérentes à un club de basket a augmenté lors des trois dernières années de 2,5 %, puis de 4,1 %, et enfin de 3,8 %.

Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

EXERCICE 22

1. Une action baisse de 20 % une année, puis de 80 % l'année suivante.

   Quel est le pourcentage de baisse annuel moyen.
2. Quel est le taux d'évolution moyen correspondant à une hausse de 60 %, suivie d'une baisse de 60 %.

EXERCICE 23

Le 1er janvier 2019, on a placé 5 000 euros sur un compte avec un rendement annuel de 2 %.

Les intérêts produits sont calculés au moment du retrait en tenant compte du nombre exact de jours.

La somme d'argent disponible au bout de x années est donnée par $s(x) = k \times a^x$ où k et a sont des réels à déterminer.

1. Déterminer k et a.
2. Quelle somme d'argent sera disponible le 8 avril 2019 ? Et le 15 novembre 2022 ?
3. Calculer le taux mensuel de ce placement à 0,01 % près.
4. Calculer de deux façons différentes la somme d'argent disponible le 1er juillet 2019. Quel résultat est le plus fiable ?

EXERCICE 24

Un site internet comptait 46 400 abonnés le 1er septembre 2018 et 51 156 abonnés le 1er septembre 2020.

1. Déterminer le taux de croissance annuel moyen de 2018 à 2020.
2. Le directeur du site suppose que la croissance va se poursuivre au même rythme et décide de modéliser le nombre d'abonnés par une fonction f du type $x \mapsto k \times a^x$ où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er septembre 2020.
   - **a.** Déterminer les valeurs de k et a.
   - **b.** Donner la valeur de $f(-2)$ sans utiliser de calculatrice.
   - **c.** Déterminer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés prévus le 25 décembre 2020.
   - **d.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, à quelle date le nombre d'abonnés dépassera 60 000.

EXERCICE 25

The human body eliminates caffeine at a rate of 11 % per hour. Therefore, the amount of caffeine in the body x hours after drinking a cup of coffee can be modelled by the function $c(x) = k \times a^x$.

1. Find the value of k and a after someone drinks a cup of coffee containing 152 mg of caffeine.

   Explain your answer.
2. How much caffeine is left in the body two hours and a half after drinking the cup?
3. Find the half-life of caffeine, meaning how long it takes to eliminate half of the caffeine. Give the result in hours and minutes.

EXERCICE 26

On prélève du sang sur un patient souffrant d'une infection bactérienne. Les bactéries, trop petites, sont indétectables dans le sang et on les met en culture pendant 24 heures.

1. On observe une phase de latence de 12 heures pendant laquelle les bactéries s'adaptent au milieu, suivie d'une phase de croissance exponentielle de 12 heures durant laquelle le nombre de bactéries par mL de sang est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[12 ; 24]$ par :

$$f(x) = 0{,}008 \times 2{,}8^x$$

   a. Justifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[12 ; 24]$.

   b. Déterminer la concentration de bactéries dans la culture au bout de 2 heures 30 minutes de croissance exponentielle, puis à la fin de la phase de culture.

2. Après 24 heures de culture et ayant détecté une infection au *Staphylococcus aureus*, on introduit un puissant antibiotique.

   On admet que la concentration de bactéries, en milliers de bactéries par mL, est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[24 ; 42]$ par :

$$g(x) = -1\,613x^2 + 82\,633x - 622\,702$$

   a. Étudier les variations de la fonction g.

   b. Au bout de combien de minutes après l'introduction de l'antibiotique la population de bactéries commence-t-elle à diminuer?

   c. L'antibiotique est jugé bien dosé s'il tue au moins 99 % des bactéries en 18 heures.

   Cet antibiotique est-il bien dosé?

   d. Représenter sur un graphique l'évolution de la population de bactéries durant les trois phases : latence, croissance exponentielle, élimination.

EXERCICE 27

D'un navire perdu au Nouveau Monde débarque 4 souris. Un an après, les souris, qui se reproduisent de façon exponentielle, sont 34.

Combien de souris seront présentes deux an et demi après le débarquement.