FONCTION INVERSE

EXERCICE 1

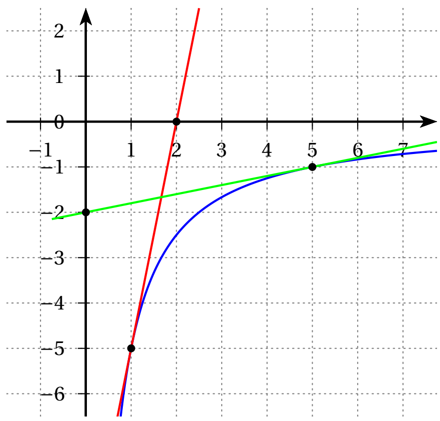
Calculer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$:

1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
2. $f(x)=3x-2+\dfrac{1}{x}$
3. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$
4. $f(x)=\dfrac{2}{x}$
5. $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$
6. $f(x)=3x^2-5x+2+\dfrac{1}{x}$
7. $f(x)=-x^2-\dfrac{2}{x}$
8. $f(x)=7x^2-2x+6+\dfrac{4}{x}$
9. $f(x)=-2x^3+4x^2+1+\dfrac{1}{x}$

EXERCICE 2

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre :

1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(5)$.
2. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(5)$.
3. En déduire l'équation réduite des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 à la courbe de la fonction f.



EXERCICE 3

Étudier le sens de variations des fonctions suivantes, définies sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$:

1. $f(x)=3+\dfrac{1}{x}$
2. $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x non nul : $f'(x)=\dfrac{(x-1)\,(x+1)}{x^2}$.
3. Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{9}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = \dfrac{(2x-3)\ (2x+3)}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 6

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x + 10 - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x non nul : $g'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 7

Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 7x - \dfrac{4}{x}$.

1. Déterminer $h'(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x non nul : $h'(x) = \dfrac{(x-2)\ (x-1)\ (3x+2)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.
4. En déduire les variations de la fonction h sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 8

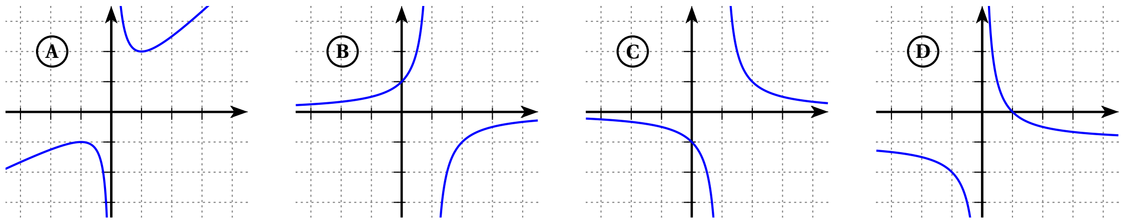
1. Montrer que pour tout réel x, on a : $x^4 - 1 = (x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)$.
2. Étudier le signe de $x^4 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$.
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Démontrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = \dfrac{3x^4-3}{x^2}$.
   c. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 9

1. Développer $(x-3)\ (x+3)$ et $(x-5)\ (x+5)$.
2. Développer $(x^2-9)\ (x^2-25)$.
3. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 34x + \dfrac{7}{3} - \dfrac{225}{x}$.
   a. Déterminer $f'(x)$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.
   c. En déduire les variations de f sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 10

Sur les graphiques ci-dessous sont représentées quatre fonctions :



Associer à chaque limite le graphique où elle est vraie.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **3.** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

EXERCICE 11

On veut tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$.

1. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$-1\,000$	-500	-100	-50	50	100	500	$1\,000$
$g(x)$								

b. Que peut-on en déduire sur le comportement de g en $+\infty$ et en $-\infty$?

2. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}01$	$0{,}1$	$0{,}5$	1
$g(x)$								

b. Que peut-on en déduire sur le comportement de g en 0 ?

3. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

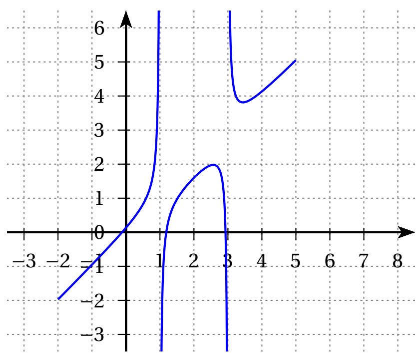
x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$g(x)$								

b. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer la courbe de la fonction g.

EXERCICE 12

Sur le graphique ci-contre, on a représenté la courbe d'une fonction f.

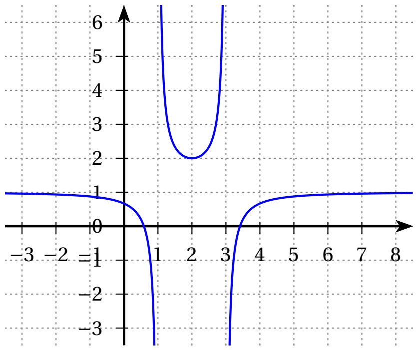
1. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Conjecturer les limites aux bornes de son ensemble de définition.



EXERCICE 13

Sur le graphique ci-contre, on a représenté la courbe d'une fonction g.

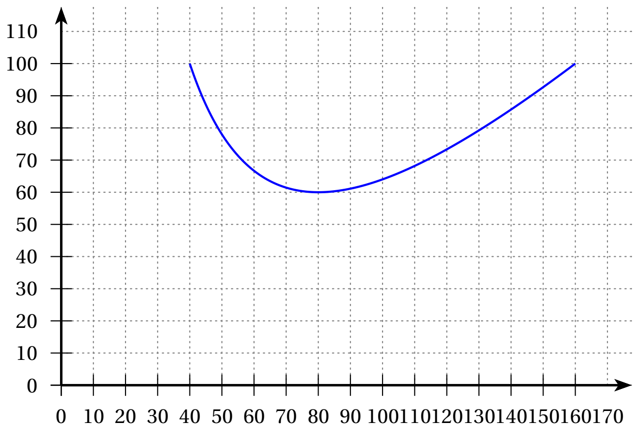
1. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Conjecturer les limites aux bornes de son ensemble de définition.



EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[40\ ;\ 160]$ par : $f(x) = x - 100 + \dfrac{6\,400}{x}$.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère.



1. Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6\,400}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[40\ ;\ 160]$.
3. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[40\ ;\ 160]$.
4. Le coût, exprimé en F, de x repas préparés par service dans un restaurant, peut s'écrire, pour $x \in [40\ ;\ 160]$:

$$C(x) = x^2 - 100x + 6\,400$$

   a. Compléter le tableau :

Nombre de repas	40	50	100
Coût de x repas			
Coût moyen d'un repas			

   b. Écrire le coût moyen d'un repas en fonction du nombre x de repas préparés. On notera ce coût moyen unitaire $C_m(x)$.

   c. Déduire de la **question 3.** le nombre de repas que ce restaurant doit servir pour que le coût moyen d'un repas soit minimal.

   d. Trouver, à l'aide du graphique, à quel intervalle doit appartenir x pour que le coût moyen unitaire soit inférieur ou égal à 90 F.

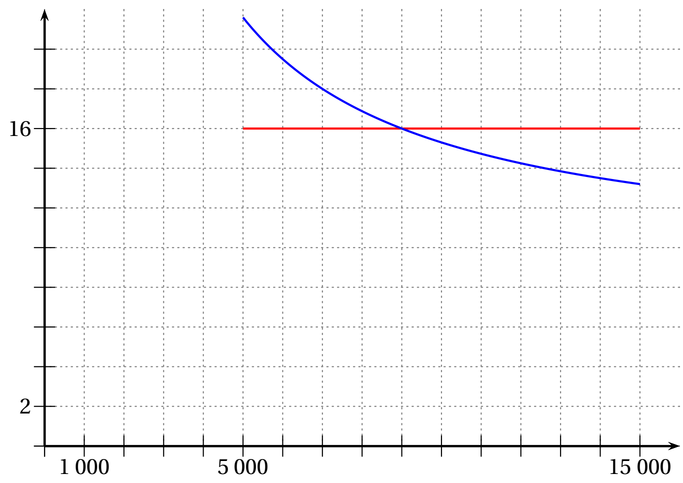
EXERCICE 15

PARTIE A.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [5 000 ; 15 000] par : $f(x) = 9 + \dfrac{63\,000}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [5 000 ; 15 000].
3. Dans le repère suivant sont représentées la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle [5 000 ; 15 000] et la droite (d) d'équation $y = 16$.

   Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (d). On tracera les pointillés utiles à la lecture.



PARTIE B.

Un restaurateur propose un menu unique.

- Les charges fixes sont estimées pour une année à 63 000 €.
- Le coût de préparation d'un repas est estimé à 9 €.
- Le prix du menu est de 16 €.

Dans cette partie on suppose que tous les repas préparés sont vendus. On désigne par x le nombre de repas servis en un an et on suppose que x appartient à l'intervalle [5 000 ; 15 000].

1. On note $g(x)$ le coût total annuel en € de ces x repas. Déterminer $g(x)$.
2. Montrer que le coût de revient d'un repas est égal à l'expression $9 + \dfrac{63\,000}{x}$.
3. A l'aide du graphique, déterminer le seuil de rentabilité du restaurant, c'est-à-dire le nombre minimum de repas qu'il faut servir annuellement pour que l'exploitation du restaurant dégage un bénéfice. Justifier.
4. **a.** Montrer que le bénéfice total annuel pour x repas s'exprime en € par :

   $$B(x) = 7x - 63\,000$$

   b. Ecrire et résoudre l'inéquation qui permet de retrouver par le calcul le seuil de rentabilité du restaurant.

   c. L'objectif du restaurateur est de réaliser un bénéfice annuel de 35 000 € minimum. Sachant que le restaurant est ouvert 300 jours dans l'année, quel nombre de repas doit-il servir, en moyenne, au minimum par jour pour atteindre cet objectif?

EXERCICE 16

Pour financer une sortie scolaire, les élèves d'une classe Terminale d'un lycée lorrain veulent vendre des bergamotes et des craquelines. Par souci d'économie, ils décident de commander les bergamotes et les craquelines en vrac, puis de faire eux-mêmes les emballages.

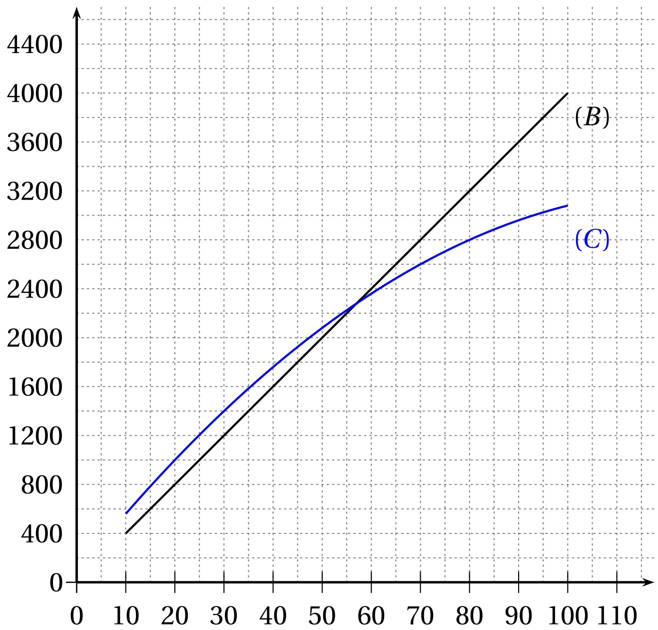
PARTIE A.

Les prix sont donnés par les deux courbes représentées ci-dessous.

La courbe (B) représente la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, qui donne le prix d'achat, en euros, de x kilogrammes de bergamotes.

La courbe (C) représente la fonction g, définie pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, qui donne le prix d'achat, en euros, de x kilogrammes de craquelines.

On admettra que le prix des bergamotes est proportionnel à la quantité achetée.



1. **a.** Déterminer graphiquement le prix, en euros, de 40 kilogrammes de bergamotes.
   En déduire par le calcul, le prix de 1 kilogramme de bergamotes.

   b. En déduire l'expression de $f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $[10\,;\,100]$ par : $g(x) = -0{,}2x^2 + 50x + 80$.

   a. Déterminer graphiquement le prix en euros, de 40 kilogrammes de craquelines.

   b. Préciser cette valeur par un calcul.

PARTIE B.

On admet que le prix moyen, en euros, d'un kg de craquelines pour une commande de x kilogrammes de craquelines est donné par la fonction h, définie sur l'intervalle $[10\,;\,100]$ par :

$$h(x) = -0{,}2x + 50 + \frac{80}{x}$$

1. Pour tout $x \in [10\,;\,100]$, déterminer $h'(x)$ où h' est la fonction dérivée de la fonction h.

2. Établir le tableau de variations de h sur $[10\,;\,100]$.

   Que peut-on en déduire quant au prix moyen du kilogramme de craquelines, en fonction de la quantité achetée ?

EXERCICE 17

PARTIE A. ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[30~;~120]$ par : $f(x) = 2x - 230 + \dfrac{7\,200}{x}$.

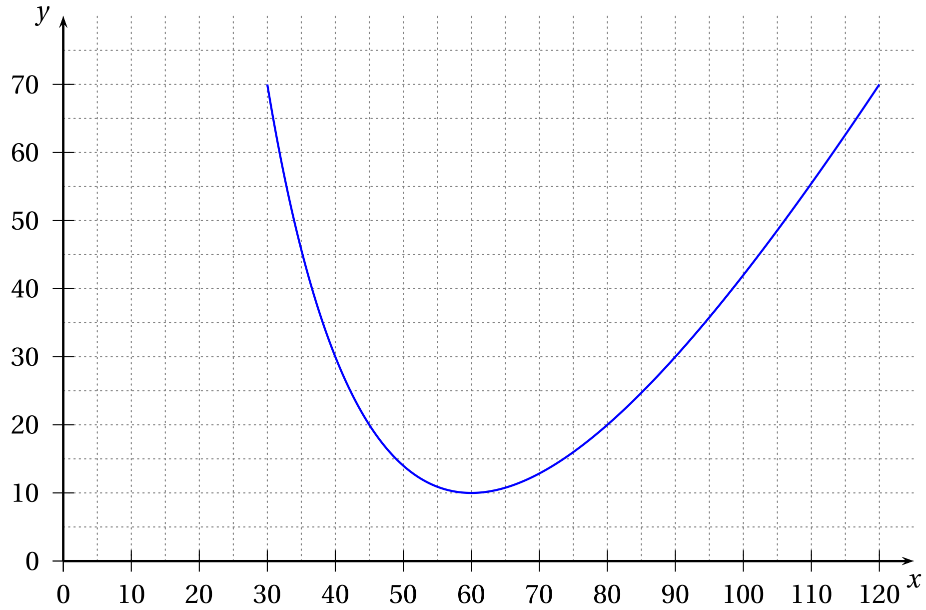
1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

   Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = \dfrac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[30~;~120]$.

3. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; I, J).

   A l'aide du graphique, encadrer par deux entiers consécutifs les solutions de l'équation $f(x) = 35$, en laissant apparaître les traits de construction utiles.



PARTIE B. ÉTUDE DE COÛT

Dans un restaurant, le coût moyen unitaire exprimé en euros de fabrication de x repas, pour x compris entre 30 et 120, est donné par la relation :

$$C_M(x) = 2x - 230 + \frac{7\,200}{x}$$

1. En utilisant la **PARTIE A**, déterminer le nombre de repas qui donne un coût moyen unitaire minimum.

   Quel est ce coût ?

2. Montrer que le coût total exprimé en euros de fabrication de x repas est donné par la relation : $C(x) = 2x^2 - 230x + 7\,200$.

3. Le restaurateur propose le repas au prix de 35 €.

   a. Calculer le bénéfice réalisé $B(x)$ en fonction du nombre x de repas servis.

   b. Combien doit-il servir de repas pour réaliser un bénéfice ?

EXERCICE 18

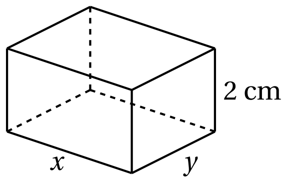
A company launches an advertising campaign to promote a product. For x campaign weeks, where $x \geqslant 1$, the company estimates that $p(x)$ percents of the target population will be aware of the existence of this product : $p(x) = 92 - \dfrac{80}{x}$.

1. Determine the percentage of the population who will know about the product after one week and after five weeks.
2. What is the derivative of $p(x)$?
3. Determine the variations of the function. Interprete this resut in the context of the exercise.
4. The company believes its campaign will be successfull if it reaches at leasr 95 percent of the target population. Will it reach its goal ?

EXERCICE 19

On souhaite fabriquer des boîtes parallélépipédiques de volume 500 cm^3 en minimisant la matière pour les fabriquer.

La hauteur des boîtes doit être de 2 cm, les autres dimensions sont notée x et y, $x > 0$ et $y > 0$.



1. En utilisant le volume d'une boîte, exprimer y en fonction de x.
2. Montrer que l'aire totale S de toutes les faces peut s'écrire : $S(x) = 500 + 4x + \dfrac{1\,000}{x}$.
3. Montrer que : $S'(x) = \dfrac{4\,(x - \sqrt{250})\,(x + \sqrt{250})}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction S sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. Donner les dimensions arrondies au millimètre près.

EXERCICE 20

Un transporteur souhaite minimiser le coût de carburant d'un trajet de 1 000 km en fonction de la vitesse moyenne v du camion.

La consommation de carburant, exprimée en L.h^{-1}, est donnée en fonction de v, exprimée en km.h^{-1} et variant de 0 à 120 km.h^{-1}, par :

$$C(v) = \frac{256}{30} + \frac{v^2}{750}$$

Le prix d'un litre carburant est égal à 1,50 €.

1. Exprimer en fonction de v la durée t du trajet.
2. Montrer que l'expression $P(v)$ représentant le coût en carburant du trajet est :

$$P(v) = \frac{12\,800}{v} + 2v$$

3. **a.** Montrer que : $P'(v) = \dfrac{2\,(v-80)\,(v+80)}{v^2}$.

   b. Étudier les variations de la fonction P sur l'intervalle $]0\,;\,120]$.

   c. En déduire la vitesse moyenne de conduite que va conseiller le transporteur au camionneur.

EXERCICE 21

Un entreprise fabrique chaque semaine une quantité q, en tonnes, de produit chimique.

Elle produit entre 10 et 100 tonnes chaque semaine. Le coût total de q tonnes produites est donné par la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,100]$ par :

$$C(q) = 3q^2 + 40q + 2\,700$$

PARTIE A. COÛT MOYEN UNITAIRE

Le coût moyen unitaire est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque q tonnes sont produites.

On appelle C_M la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10\,;\,100]$: $C_M(q) = 3q + 40 + \dfrac{2\,700}{q}$.
2. Calculer $C'_M(q)$.
3. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10\,;\,100]$: $C'_M(q) = \dfrac{3\,(q-30)\,(q+30)}{q^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]10\,;\,100]$.
5. Quel est le coût moyen unitaire minimal ? Pour quelle quantité de produit chimique est-il atteint ?

PARTIE B. COÛT MARGINAL

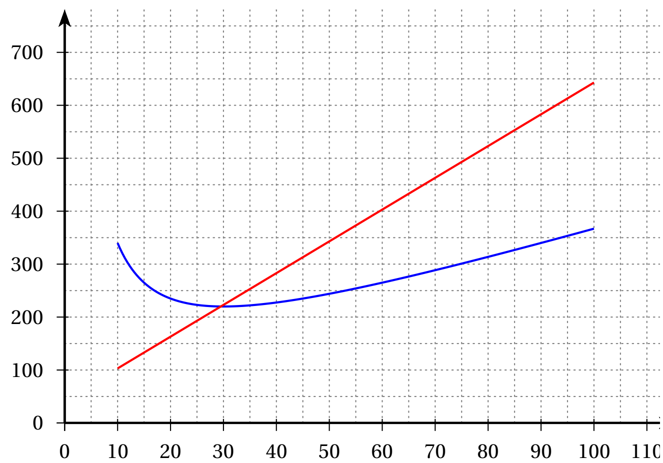
Le coût marginal est le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire.

On appelle C_m la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

1. Calculer $C_m(20)$. Interpréter ce résultat avec les données de l'énoncé.
2. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10\,;\,100]$: $C_m(q) = 6q + 43$.
3. Déterminer $C'(q)$. Quelle est la différence entre $C_m(q)$ et $C'(q)$?

PARTIE C. COMPARAISON DU COÛT MARGINAL ET DU COÛT MOYEN

La courbe $\mathscr{C}$ représentant le coût moyen et la droite $\mathscr{D}$ représentant le coût marginal sont représentées sur le graphique ci-dessous :



Une règle économique affirme que le coût moyen unitaire est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Cette règle s'applique-t-elle ici ?

EXERCICE 22

Cédric achète régulièrement des livres et il va régulièrement au cinéma.

On appelle x le nombre de livres qu'il achète chaque année et y le nombre de séances de cinéma auxquelles il assiste chaque année.

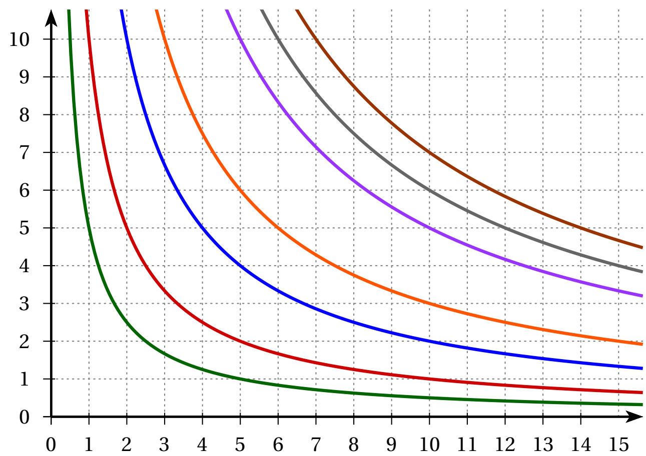
Comme il aime autant aller au cinéma que lire un livre, on évalue son niveau de satisfaction avec la fonction S définie par :

$$S(x\,;\,y) = x \times y$$

où les réels x et y sont strictement positifs.

Plus ce nombre est grand, plus Cédric est satisfait.

1. Quel est le niveau de satisfaction de Cédric dans chaque situation :
   a. Il achète 3 livres et il va 2 fois au cinéma.
   b. Il achète 1 livre et il va 4 fois au cinéma.
2. Quelle situation apporte le plus de satisfaction à Cédric ?
3. Comparer $S(x\,;\,y)$ et $S(y\,;\,x)$. Traduire cette comparaison avec les données de l'énoncé.
4. On appelle courbe d'indifférence de niveau k l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $S(x\,;\,y) = k$, le réel k correspondant à un niveau de satisfaction de Cédric.
   a. Vérifier que la courbe d'indifférence de niveau 5 a pour équation : $y = \dfrac{5}{x}$.
   b. Tracer les courbes d'indifférence de niveau 30 et de niveau 70 dans un repère.
   Voici quelques courbes d'indifférence :



5. Cédric consacre un budget annuel de 100 € pour le cinéma et la lecture. On considère qu'un livre de poche coûte 5 € et qu'une place de cinéma coûte 6 €.
   a. Peut-il acheter 6 livres et aller 8 fois au cinéma ?
   b. Lorsque Cédric dépense son budget maximal, justifier que x et y doivent vérifier l'équation : $5x + 6y = 100$.
   c. On admet que cette équation peut être représentée graphiquement par une droite (d).
   Montrer que (d) admet pour équation réduite : $y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{50}{3}$.
   d. Tracer cette droite dans le graphique précédent.
6. Avec ce budget de 100 €, Cédric peut-il avoir un niveau de satisfaction de 30 ? Si oui, pour quelles valeurs de x et de y ?

   Même question avec le niveau de satisfaction de 70.