

FONCTION INVERSE

(SUJET DE SECOURS)

Une entreprise fabrique chaque semaine une quantité x , en tonnes, de produit chimique. Elle produit entre 10 et 100 tonnes chaque semaine. Le coût total de x tonnes produites est donné par la fonction définie sur l'intervalle $[10 ; 100]$ par :

$$C(x) = 3x^2 + 40x + 2\,700$$

PARTIE A. COÛT MOYEN UNITAIRE

Le coût moyen unitaire est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque x tonnes sont produites.

On appelle C_M la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[10 ; 100]$: $C_M(x) = 3x + 40 + \frac{2\,700}{x}$.
- Calculer $C'_M(x)$.
- Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[10 ; 100]$: $C'_M(x) = \frac{3(x-30)(x+30)}{x^2}$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]10 ; 100]$.
- Quel est le coût moyen unitaire minimal ? Pour quelle quantité de produit chimique est-il atteint ?

PARTIE B. COÛT MARGINAL

Le coût marginal est le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire.

On appelle C_m la fonction représentant le coût marginal : $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

- Calculer $C_m(20)$. Interpréter ce résultat avec les données de l'énoncé.
- Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[10 ; 100]$: $C_m(x) = 6x + 43$.
- Déterminer $C'(x)$. Quelle est la différence entre $C_m(x)$ et $C'(x)$?

PARTIE C. COMPARAISON DU COÛT MARGINAL ET DU COÛT MOYEN

La courbe $\mathcal{C}$ représentant le coût moyen et la droite $\mathcal{D}$ représentant le coût marginal sont représentées sur le graphique ci-contre :

Une règle économique affirme que le coût moyen unitaire est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Cette règle s'applique-t-elle ici ?

