

FONCTIONS EXPONENTIELLES (SUJET DE SECOURS)~ 7 points **EXERCICE 1**

1. On a : $C(0) = 10\,000$. Or : $C(0) = k \times a^0 = k \times 1 = k$. D'où : $k = 10\,000$.
Le capital augmente de 3 % en 1 an, autrement dit, il est multiplié par 1,03 en 1 an.
On a : $C(1) = 10\,000 \times 1,03$. Or : $C(1) = 10\,000 \times a^1 = 10\,000 \times a$. D'où : $a = 1,03$.
2. Le 1^{er} janvier 2025 : $x = 5$ et $C(5) = 10\,000 \times 1,03^5 \simeq 11\,592,74$.
Le 1^{er} janvier 2025, le capital est environ égal à 11 592,74 €.
3. On obtient par balayage : $C(23) = 10\,000 \times 1,03^{23} \simeq 19\,736$ et $C(24) = 10\,000 \times 1,03^{24} \simeq 20\,328$.
Le capital aura au moins doublé au bout de 24 ans.
4. On a : $1 + t_{\text{mensuel}} = (1 + t_{\text{annuel}})^{\frac{1}{12}} = 1,03^{\frac{1}{12}} \simeq 1,002\,47$.
D'où : $t_{\text{mensuel}} \simeq 1,002\,47 - 1 \simeq 0,002\,47 \simeq 0,247\%$.
Le taux mensuel moyen équivalent au taux annuel de 3 % est environ égal à 0,247 %.
5. Le 1^{er} juillet 2021, il s'est écoulé 18 mois.
On a : $C = 10\,000 \times (1 + t_{\text{mensuel}})^{18} \simeq 10\,000 \times 1,002\,47^{18} \simeq 10\,453,36$.
Le 1^{er} juillet 2021, le capital est environ égal à 10 453,36 €.
On obtient le même résultat en calculant $C(1,5) = 10\,000 \times 1,03^{1,5}$.

~ 7 points **EXERCICE 2**

1. On a : $m(1) = 100 \times 1,15^1 - 100 = 100 \times 1,15 - 100 = 115 - 100 = 15$.
Au bout de 1 minute, la masse de caramel obtenue est égale à 15 g.
2. On a : $m(2) = 100 \times 1,15^2 - 100 = 32,25$.
Au bout de 2 minutes, la masse de caramel obtenue est égale à 32,25 g.
3. On a : $m(3,5) = 100 \times 1,15^{3,5} - 100 \simeq 63,10$.
Au bout de 3 minutes et 30 secondes, la masse de caramel est environ égale à 63,10 g.
4. On a : $m(5) = 100 \times 1,15^5 - 100 \simeq 101,14$.
Comme 100 g de sucre vont donner 100 g de caramel et $101,14 \simeq 100$, alors la caramélisation du sucre dure bien environ 5 minutes.
5. On obtient par balayage : $m\left(2 + \frac{54}{60}\right) \simeq 49,98$ et $m\left(2 + \frac{55}{60}\right) \simeq 50,33$.
Il y a autant de sucre que de caramel dans la casserole au bout de 2 minutes et 54 secondes environ.
6. La première demi-caramélisation dure environ 3 minutes et la deuxième demi-caramélisation dure environ 2 minutes.
La caramélisation du sucre est donc plus rapide à la fin. C'est un peu le principe de la croissance exponentielle. Demandez à Chef Bessière ce qu'il en pense.

~ 6 points **EXERCICE 3**

1. A la sortie du four : $x = 0$ et $T(0) = 19 + 70 \times 0,9^0 = 19 + 70 \times 1 = 89$.

La température du thé à sa sortie du four est égale à 89°C .

2. On a : $T(5) = 19 + 70 \times 0,9^5 \simeq 60,33$.

La température du thé au bout de 5 minutes est environ égale à $60,33^\circ\text{C}$.

3. On obtient par balayage : $T\left(5 + \frac{4}{60}\right) \simeq 60,04$ et $T\left(5 + \frac{5}{60}\right) \simeq 59,97$.

Une personne qui aime boire son thé à 60°C doit attendre un peu plus de 5 minutes et 4 secondes.

4. Au bout d'une heure : $x = 60$ et $T(60) = 19 + 70 \times 0,9^{60} \simeq 19,13$.

Au bout de deux heures : $x = 120$ et $T(120) = 19 + 70 \times 0,9^{120} \simeq 19,00$.

La température de la pièce semble être égale à 21°C car la température du thé s'en rapproche sur le long terme.

Nous aborderons ce genre de problématique lorsque nous parlerons de limite de fonction.