

FONCTION INVERSE

Dans son nouveau service de restauration rapide, Arturo réalise entre 20 et 100 empanadas par jour, qu'il facture au prix de 6 € l'unité.

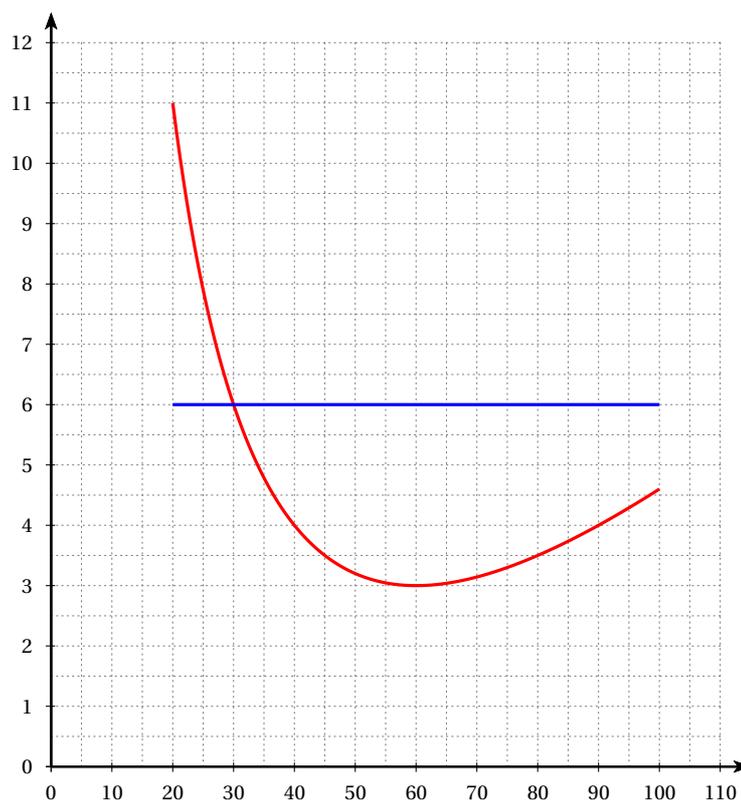
Les quatre parties de l'exercice sont relativement indépendantes.

PARTIE A. ÉTUDE GRAPHIQUE

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[20 ; 100]$ par :

$$f(x) = 0,1x - 9 + \frac{360}{x}$$

La courbe \mathcal{C} de la fonction f ainsi que la droite (d) d'équation $y = 6$ sont représentées sur le graphique ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique. *On laissera apparents les traits nécessaires à cette lecture graphique.*

1. Indiquer l'image de 80 par la fonction f .
2. Indiquer les antécédents de 4 par la fonction f .
3. Indiquer l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite (d) .

PARTIE B. ÉTUDE MATHÉMATIQUE

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout $x \in [20 ; 100]$:

$$f'(x) = \frac{0,1(x+60)(x-60)}{x^2}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[20 ; 100]$.
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[20 ; 100]$.

PARTIE C. ÉTUDE ÉCONOMIQUE

Le coût de fabrication de x empanadas, charges incluses, exprimé en euros, est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $[20 ; 100]$ par :

$$C(x) = 0,1x^2 - 9x + 360$$

1. Quel est le montant des charges fixes, en euros?
2. Montrer que le coût moyen unitaire d'un empanada est donné par la fonction f .
3. Déduire de la PARTIE A le nombre minimum d'empanadas que Arturo doit vendre pour ne pas être déficitaire.
4. Montrer que le bénéfice réalisé pour x empanadas vendus est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[20 ; 100]$ par :

$$B(x) = -0,1x^2 + 15x - 360$$

5. Est-il vrai que le nombre d'empanadas produits permettant de minimiser le coût moyen unitaire correspond au nombre d'empanadas vendus permettant d'optimiser le bénéfice?
Si oui, pourquoi?
Sinon, trouver un contre-exemple ou calculer le bénéfice maximum et dire en quelle valeur il est atteint.

PARTIE D.

Le pourcentage de personnes du quartier au courant de l'existence du nouveau restaurant d'Arturo, après x semaines, où $x \geq 1$, est donné par :

$$p(x) = 48 - \frac{40}{x}$$

1. Quel est le pourcentage de personnes du quartier au courant de l'existence du nouveau restaurant d'Arturo au bout de 1 semaine? Au bout de 10 semaines?
2. Donner la dérivée de la fonction p .
3. En déduire les variations de la fonction p . Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. Plus d'une personne du quartier sur deux sera-t-elle au courant un jour de l'existence du nouveau restaurant d'Arturo?

Justifier la réponse.