

VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI BINOMIALE**EXERCICE 1**

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Si l'on obtient un 7, un 8, un 9 ou un 10, on perd 3 euros. Si l'on obtient un Valet, une Dame ou un Roi, on gagne 2 euros. Si l'on obtient un As, on gagne 5 euros.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

Donner l'ensemble des valeurs prises par X .

EXERCICE 2

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire l'événement $\{X = 2\}$.
3. Décrire l'événement $\{X = 3\}$.

EXERCICE 3

On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6. On gagne 5 euros si l'on obtient la face numérotée « 3 » et on gagne 1 euro dans les autres cas.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

1. Donner $p(X = 1)$.
2. Donner $p(X = 5)$.

EXERCICE 4

On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de voitures neuves vendues par un concessionnaire.

Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i	0	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	0,45	0,3	0,15	p

1. Donner la probabilité $p(X = 1)$.
2. Calculer $p(X \leq 1)$.
3. Calculer le réel p .
4. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 5

Un sac contient un jeton marqué « 2 » et un jeton marqué « 3 ».

On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage.

On définit alors la variable aléatoire X qui, à chaque partie, associe le produit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience, puis l'ensemble des valeurs prises par X .
2. Décrire l'événement $\{X = 9\}$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire l'événement $\{X < 8\}$ et calculer sa probabilité.

EXERCICE 6

1. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i	2	5
Probabilité $p(X = x_i)$	0,4	0,6

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

2. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.
Donner son espérance mathématique et son écart-type.

EXERCICE 7

Un adolescent télécharge au plus cinq applications payantes sur son smartphone par mois.

On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre d'applications achetées par l'adolescent.

La loi de N est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeur k	0	1	2	3	4	5
Probabilité $p(N = k)$	0,13	0,2	p	0,07	0,3	0,1

1. Calculer la probabilité manquante p .
2. Calculer la probabilité qu'il achète au moins trois applications au cours du mois.
3. Calculer la probabilité qu'il achète au plus quatre applications au cours du mois.

EXERCICE 8

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de connexions d'un étudiant à l'espace pédagogique interactif de son université (EPI).

Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i	0	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	0,1	0,2	0,5	0,2

1. Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Interpréter le résultat.

EXERCICE 9

On lance une pièce de monnaie truquée de telle manière que la probabilité de sortie de la face « PILE » est 0,4.

Le joueur gagne 3 euros si la face visible est « PILE », sinon il perd 2 euros.

On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

1. Etablir la loi de probabilité de G .
2. Calculer l'espérance de G .
3. Le jeu est-il équitable? Justifier.

EXERCICE 10

Des études statistiques ont montré qu'à la naissance, la probabilité d'avoir un garçon est égale à 0,51. On rencontre au hasard une famille de trois enfants, dont les naissances sont supposées indépendantes.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de garçons.

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité que cette famille ait exactement un garçon.
3. Calculer la probabilité que cette famille ait au moins un garçon.
4. On rencontre ensuite au hasard et de manière indépendante 10 familles de trois enfants.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de familles ayant au moins un garçon.

- a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
- b. Calculer la probabilité que neuf familles exactement sur les dix aient au moins un garçon.

EXERCICE 11

Un étudiant se rend à vélo à l'université distante de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.

Sur le parcours, il rencontre 6 feux bicolores non synchronisés.

Pour chaque feu bicolore, la probabilité qu'il soit au vert est égale à $\frac{2}{3}$ et celle qu'il soit au rouge est égale à $\frac{1}{3}$.

Un feu rouge lui fait perdre une minute et demie.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts rencontrés par l'étudiant sur son parcours.

On appelle T la variable aléatoire donnant le temps en minutes mis par l'étudiant pour se rendre à l'université.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2.
 - a. Exprimer T en fonction de X .
 - b. Déterminer $E(T)$ et interpréter le résultat.
3. L'étudiant part 17 minutes avant le début d'un cours.
 - a. Peut-il espérer être à l'heure?
 - b. Calculer la probabilité pour qu'il arrive en retard.

EXERCICE 12

Un lièvre et une tortue lancent un dé cubique parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6.

- Si le dé tombe sur 6, le lièvre gagne et la partie s'arrête;
- Si le dé tombe sur un autre numéro, la tortue avance d'une case. La tortue gagne et la partie s'arrête si elle parvient à avancer de n cases.

On note $p_n(T)$ la probabilité que la tortue gagne et $p_n(L)$ la probabilité que le lièvre gagne.

Partie A. Étude du cas $n = 4$

1.
 - a. Montrer que $p_4(T) \approx 0.48$.
 - b. A quel animal le jeu est-il favorable?
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Combien de lancers faut-il en moyenne pour obtenir un vainqueur?
3. Les deux animaux jouent 10 parties indépendantes.
 - a. Quelle est la probabilité que la tortue gagne exactement 5 fois?
 - b. Quelle est la probabilité que la tortue gagne au moins 2 fois?

Partie B. Cas général

1.
 - a. Calculer $p_n(T)$ en fonction de n .
 - b. Déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.
2.
 - a. Calculer l'espérance du nombre de parties remportées par la tortue dans une série de 10 parties jouées.
 - b. Pour quelles valeurs de n la tortue peut-elle espérer gagner au moins 9 parties sur 10?

EXERCICE 13

Combien de fois faut-il jeter une pièce de monnaie parfaitement équilibrée pour obtenir au moins une fois la face PILE avec une probabilité supérieure à 0,99?