SUITES

EXERCICE 1

Dans chaque cas, on donne les cinq premiers termes d'une suite (u_n). Trouver les deux termes suivants possibles u_5 et u_6 de manière logique.

1. $u_0 = -3$ $\quad u_1 = 1$ $\quad u_2 = 5$ $\quad u_3 = 9$ $\quad u_4 = 13$
2. $u_0 = 1$ $\quad u_1 = 3$ $\quad u_2 = 9$ $\quad u_3 = 27$ $\quad u_4 = 81$
3. $u_0 = 7$ $\quad u_1 = 12$ $\quad u_2 = 19$ $\quad u_3 = 28$ $\quad u_4 = 39$
4. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ $\quad u_1 = \dfrac{3}{5}$ $\quad u_2 = \dfrac{5}{8}$ $\quad u_3 = \dfrac{7}{11}$ $\quad u_4 = \dfrac{9}{14}$

EXERCICE 2

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 7$.

   Exprimer u_n en fonction de n puis calculer u_{10} et u_{100}.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_2 = 7$ et $v_6 = 9$.

   Calculer sa raison r et son premier terme v_0.

EXERCICE 3

On donne les premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 d'une suite (u_n). Dans quel cas peut-elle être arithmétique ?

1. 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16.
2. 28 ; 21 ; 14 ; 7 ; 0.
3. 5,2 ; 5,6 ; 6 ; 6,4 ; 6,8.

EXERCICE 4

On place un capital de 1 250 € à intérêts simples au taux annuel de 6 %. Cela signifie que les intérêts produits sont toujours égaux à 6 % de 1 250 €.

On désigne par I les intérêts produits chaque année et par C_n la somme disponible au bout de n années. On a donc : $C_0 = 1\,250$.

1. Calculer I.
2. Calculer C_1, C_2 et C_3.
3. Montrer que (C_n) est une suite arithmétique. Quel est son premier terme ? Quelle est la raison ?
4. Exprimer C_n en fonction de n.
5. Au bout de combien d'années la somme disponible dépasse-t-elle 2 000 € ?

EXERCICE 5

1. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 1{,}5$ et de premier terme $u_0 = 8$.
   Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer u_1 puis u_2.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$.
   Exprimer v_n en fonction de n puis calculer v_5 et v_{10}.
3. Soit (w_n) une suite géométrique telle que $w_7 = 2$ et $w_{10} = 54$.
   Calculer sa raison q.

EXERCICE 6

Un organisme propose un placement à intérêts composés au taux annuel $t_a = 3{,}5$ %. Cela signifie que chaque année, le capital augmente de 3,5 %.

On note C_n la valeur acquise par le capital au bout de n années.

1. Indiquer la nature de la suite des capitaux (C_n).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = 1{,}035^n \times C_0$.
3. Calculer la valeur acquise par un capital de 10 000 € au bout de :

   a. 1 an. **b.** 2 ans. **c.** 3 ans. **d.** 10 ans.
4. Calculer la valeur actuelle d'un capital de 20 000 € dans 10 ans.
5. Calculer le taux semestriel t_s équivalent au taux annuel t_a.
6. Calculer la valeur acquise par un capital de 10 000 € au bout de :

   a. 6 mois. **b.** 18 mois.

EXERCICE 7

L'entreprise Iron SA exploite un filon de minerai de fer depuis 1950.

La première année d'extraction l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer. Cependant depuis 1950, en raison de difficultés croissantes d'extraction, de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.

On appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

Les résultats seront arrondis à la tonne.

1. Justifier que $T_1 = 19\,800$ puis calculer T_2 et T_3.
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
3. Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n.
4. Quelle est la quantité extraite en 2008 ?
5. On admet que pour tout réel $q \neq 1$:
   $$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
   Montrer que la quantité totale extraite entre l'année 1950 et l'année $(1950 + n)$ est :
   $$S_n = 2\,000\,000 \times \left(1 - 0{,}99^{n+1}\right)$$
6. En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 tonnes de métal. En quelle année, théoriquement, le filon sera-t-il épuisé ?

EXERCICE 8

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A. LES ÉCONOMIES

Afin de se constituer un capital, un épargnant place 1 000 euros sur un compte non rémunéré et, chaque mois, verse 75 euros sur ce compte.

On note u_n le montant en euros du capital accumulé au bout de n mois. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) en justifiant la réponse.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   Au bout de combien de temps le capital accumulé est-il supérieur à 3 500 euros ? Justifier la réponse.

PARTIE B. LES DÉPENSES

Cet épargnant doit surveiller ses dépenses. En janvier 2014 il a dépensé 660 € et, jusqu'à présent, ses dépenses ont augmenté chaque mois de 4 %. On suppose que cette évolution va se poursuivre à l'avenir.

Cette évolution conduit à modéliser le montant en euros des dépenses mensuelles au cours du n-ième mois après janvier 2014 par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 660$.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que $v_1 = 1{,}04 v_0$. Calculer v_3 et interpréter le résultat.
2. Calculer le montant des dépenses au mois de décembre 2014.
3. Selon ce modèle, quand l'épargnant devrait-il doubler ses dépenses par rapport à janvier 2014 ?

EXERCICE 9

Par définition, la valeur actuelle E d'une suite de n annuités constantes de versement annuel a au taux d'intérêt annuel t est définie par la somme des valeurs actuelles de chaque versement.

Autrement dit :

$$\mathrm{E} = \frac{a}{1+t} + \ldots + \frac{a}{(1+t)^n}$$

Avec les notations précédentes, on peut montrer que :

$$\mathrm{E} = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Réciproquement, le versement annuel a d'un emprunt E à n annuités constantes au taux d'intérêt annuel t est donné par :

$$a = \mathrm{E} \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

1. Une entreprise souhaite anticiper un remboursement de matériel décomposé en 5 versements de 2 000 euros au taux d'intérêt annuel de 6 %.
   - **a.** Calculer le montant du remboursement anticipé.
   - **b.** Calculer l'économie réalisée.
2. On emprunte 200 000 euros pendant 20 ans au taux d'intérêt annuel de 4 %.
   - **a.** Calculer le montant du versement annuel.
   - **b.** Calculer le coût total du crédit.