DÉRIVATION

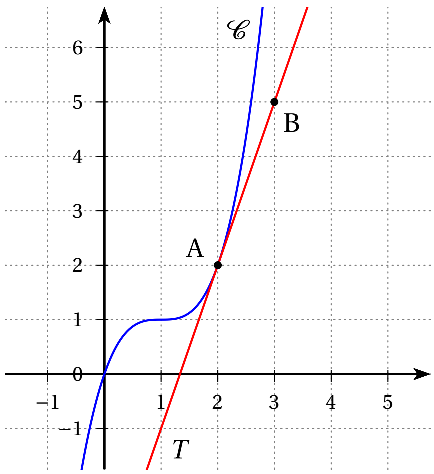
EXERCICE 1

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La droite T est une tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Préciser l'abscisse du point où T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** Par lecture graphique, déterminer le coefficient directeur de la droite T.

   b. En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(2)$.



EXERCICE 2

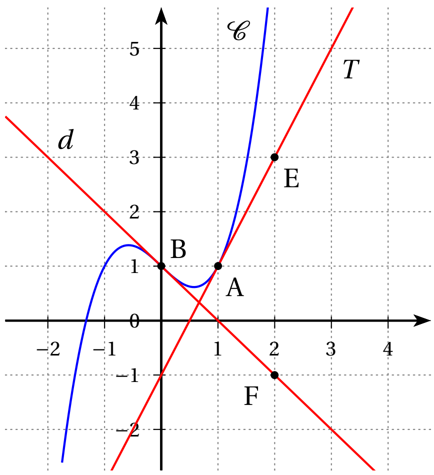
Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Les droites T et d sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$.

1. **a.** Quel est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 ?

   b. Quelle droite est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ?
2. **a.** Justifier que le coefficient directeur de la droite T est égal à 2.

   b. Quel nombre dérivé peut-on en déduire ? Quelle est sa valeur ?
3. Calculer $f'(0)$.



EXERCICE 3

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 7$
2. $f_2(x) = 3x$
3. $f_3(x) = -7x + 1$
4. $f_4(x) = -x$
5. $f_5(x) = 5x + 1$
6. $f_6(x) = 3 - 2x$
7. $f_7(x) = -2x^2 + 3x - 17$
8. $f_8(x) = 12 + 6x^3$
9. $f_9(x) = 7x^3 + 6 - 10x^2$

EXERCICE 4

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$ et C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

On donne le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	3	0	-1	-2	0
$f'(x)$	2	$2{,}5$	0	-3	-2	0	2

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

1. L'image de -2 par f est 1.
2. Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est -1.
3. La pente de la tangente à C au point d'abscisse 2 est 0.
4. Les tangentes à C aux points d'abscisses -3 et 2 sont parallèles.
5. La tangente à C au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.
6. L'équation réduite de la tangente à C au point d'abscisse 1 est $y = -2x - 1$.
7. La courbe C passe par le point de coordonnées $(2\,;\,0)$.
8. Le nombre dérivé de f en -3 est 2.
9. La tangente à C au point d'abscisse 0 a une pente négative.

EXERCICE 5

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = x^7$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
7. $f(x) = -x^3 + 4x$
8. $f(x) = (-2x+1)(x+1)$
9. $f(x) = (3x+2)x^2$
10. $f(x) = \dfrac{x+2}{3x}$
11. $f(x) = \dfrac{-x^3+4x}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2}$

EXERCICE 6

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3\,\mathrm{e}^{x}$
2. $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x^2-3}$
3. $f_3(x) = -4\,\mathrm{e}^{3x-1}$
4. $f_4(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$
5. $f_5(x) = \ln(7x^2+6)$
6. $f_9(x) = 4\ln(x^4+10)$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 10$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser sa nature et en quelle valeur de x il est atteint.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9x - 10$.

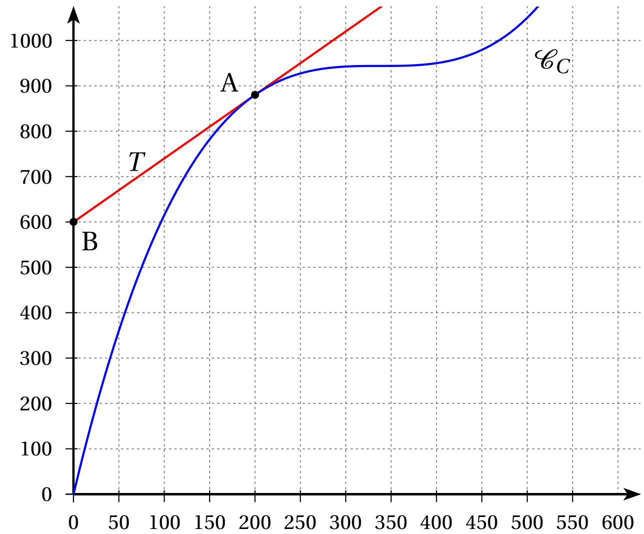
1. Calculer le fonction dérivée f' de f.
2. Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Donner le maximum (ou le minimum) de f ainsi qu'en quelle valeur il est atteint.

EXERCICE 9

Une entreprise fabrique des articles de sport.

Le coût total de fabrication, en euros, est modélisé par une fonction C dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

La tangente T à cette courbe au point A (200 ; 880) passe par le point B (0 ; 600).



On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 201ème article.

Une valeur approchée de ce coût est donné par le nombre dérivé de la fonction C en 200.

Déterminer graphiquement une valeur approchée du coût marginal au rang 200.

EXERCICE 10

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire, en euros, réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes.

La fonction B est définie sur l'intervalle $[0 ; 45]$ par $B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$.

1. Calculer $B'(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 45]$, $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 45]$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction B.
5. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

EXERCICE 11

Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$ par :

$$f(t) = 0{,}14t^3 - 3{,}15t^2 + 18{,}48t + 18$$

Lorsque t représente le temps, en minutes, on admet que $f(t)$ modélise le température, en degrés Celsius, du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1. Pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que :

$$f'(t) = 0{,}42(t-4)(t-11)$$

2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

EXERCICE 12

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule.

Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[30\ ;\ 130]$ par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$$

où x est exprimé en km/h et $f(x)$ est exprimé en litres pour 100 km.

1. Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km/h, quelle est sa consommation ?

   Et lorsqu'il roule à 50 km/h ?
2. Montrer que la dérivée f' de f sur $[30\ ;\ 130]$ peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{800x - 60\,000}{x^3}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30\ ;\ 130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimale ? Que vaut alors cette consommation (arrondir à 0,01 près) ?

EXERCICE 13

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$.

   On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

   a. Montrer que $f'(x) = (2-2x^2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ et dresser son tableau de variations.
2. En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par la fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.

   Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.

   Un journal affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.

   Que pouvez-vous dire de cette affirmation ?