CALCUL MATRICIEL

EXERCICE 1

1. Écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension 3×4 telle que, $\forall i$ et $\forall j$: $a_{ij} = i \times j$.
2. Écrire la matrice carré $B = (b_{ij})$ d'ordre 5 telle que, $\forall i$: $b_{ii} = i^2$, et, $\forall i \neq j$: $b_{ij} = 0$.
3. Écrire la matrice carré $C = (c_{ij})$ d'ordre 4 telle que, $\forall i$ et $\forall j$: $c_{ij} = \max(i\ ;\ j)$.

EXERCICE 2

Pour la fabrication de deux articles **A** et **B**, on distingue trois facteurs techniques de production : matières premières, travail et énergie.

Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'un article **A** et à celle d'un article **B** ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces trois facteurs de production (matières premières, travail et énergie).

Facteurs techniques	Article **A**	Article **B**	Coût d'une unité du facteur (en euros)
Nombre d'unités de matières premières	6	5	8
Nombre d'unités de travail	3	4	5
Nombre d'unités d'énergie	3	2	4

On note $F = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux articles **A** et **B**.

On note $C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice ligne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (matières premières, travail et énergie).

1. Calculer sous forme d'un produit de matrices, la matrice P des coûts de production de chaque article.
2. La marge bénéficiaire sur chaque article est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 20 % pour l'article **A** et à 25 % pour l'article **B**.

   Soit $M = \begin{pmatrix} 1{,}20 & 0 \\ 0 & 1{,}25 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la marge bénéficiaire.

   A l'aide d'un produit de matrices, déterminer la matrice V des prix de vente de chaque article.
3. L'entreprise reçoit une commande de 15 articles **A** et 10 articles **B**.

   Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

EXERCICE 3

Un constructeur de planches de surf fabrique trois modèles.

La conception de chaque modèle nécessite le passage par trois postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	**Poste 1**	**Poste 2**	**Poste 3**
Modèle 1	8 h	10 h	14 h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h

Tableau 2	
Poste 1	25 €/h
Poste 2	20 €/h
Poste 3	15 €/h

1. Soient H et C les deux matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

- **a.** Donner la matrice produit $P = H \times C$.
- **b.** Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$.

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants : **Modèle 1** : 500 € ; **Modèle 2** : 350 € ; **Modèle 3** : 650 €.

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

- **a.** Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système : $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.
- **b.** Déterminer les réels a, b et c.

EXERCICE 4

On considère la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices :

1. $X - 3I_3$. **2.** $I_3 - 2X$. **3.** $-(X - 3I_3)$. **4.** $4(I_3 - X)$.

EXERCICE 5

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer et comparer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$.

EXERCICE 6

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible, et dans ce cas donner la dimension de la matrice produit. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 7

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit BA.
2. Que peut-on en déduire pour la matrice A?

EXERCICE 8

Cinq étudiants niveau Bac + 2 présentent le concours Passerelle 1 pour intégrer certaines écoles de commerce en première année.

On donne ci-dessous les noms de certaines écoles et les coefficients des épreuves écrites du concours pour chacune d'entre elles (source : Passerelle-ESC).

	Synthèse	Anglais	Épreuve au choix	Test Arpège
ESC Grenoble	10	6	12	2
ESC Rennes	8	8	12	2
ESC Montpellier	9	8	9	4
ESC Clermont	8	6	12	4

	Éric	Camille	Sofiane	Océane	Romain
Synthèse	12	17	15	12	8
Anglais	14	10	20	11	10
Épreuve au choix	8	14	12	10	13
Test Arpège	11	12	8	15	17

1. A l'aide d'un calcul matriciel, donner le nombre total de points obtenus par chaque étudiant et par école.
2. En déduire la moyenne pondérée sur les 4 épreuves écrites, par étudiant et par école.

   Arrondir à une décimale.

EXERCICE 9

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, où x est un réel.

Déterminer x pour que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 10

Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. On dénombre 58 têtes et 160 pattes.

On note x le nombre de lapins et y le nombre de poules.

1. Montrer que x et y satisfont le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 58 \\ 4x+2y & = & 160 \end{array}\right.$.
2. Montrer que ce système peut se traduire sous la forme $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 58 \\ 160 \end{pmatrix}$$

3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que A est inversible et que : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
5. Combien y a-t-il de lapins ? Combien y a-t-il de poules ?

EXERCICE 11

Pour mesurer la quantité de bois de chauffage, on utilise comme unité le stère.

Lorsqu'un stère de bois est coupé en bûches, il occupe un volume qui dépend de la longueur de coupe comme indiqué ci-dessous :

- un stère de bûches de longueur 1 mètre occupe un volume de 1 m^3 ;
- un stère de bûches de longueur 0,5 mètre occupe un volume de 0,8 m^3 ;
- un stère de bûches de longueur 0,33 mètre occupe un volume d'environ 0,68 m^3.

Pour une longueur L de bûches donnée, le nombre de stères n est proportionnel au volume V occupé par le bois rangé.

Le coefficient de proportionnalité k_L, dont la valeur dépend de la longueur de coupe, vérifie la relation $n = k_L \times V$.

Pour des longueurs de bûches L comprises entre 0,20 m et 1 m, le coefficient de proportionnalité k_L peut être calculé à l'aide de la formule suivante :

$$k_L = aL^3 + bL^2 + cL + d$$

où a, b, c et d sont des réels à déterminer.

1. Avec les données fournies, déterminer les valeurs exactes de k_1 et $k_{0,5}$.
2. En admettant que $k_{0,8} = 1{,}1$ et que $k_{0,2} = 1{,}76$, et à l'aide de la question précédente, déterminer un système vérifié par les inconnues a, b, c et d.
3. Résoudre le système précédent à l'aide d'un calcul matriciel. En déduire l'expression de k_L en fonction de L.
4. Déterminer avec ce qui précède la valeur de $k_{0,6}$.

   Déterminer alors le volume occupé par un stère de bois coupé en bûches de 0,60 m.

   Donner le résultat arrondi au centième.