Université Paris 1
Panthéon-Sorbonne
90, rue de Tolbiac
75 013 Paris

Fascicule de Cours

D.A.E.U.

Option

« Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales »

Emmanuel Dupuy
Emmanuel-R.Dupuy@ac-paris.fr

Paris
Année 2022-2023

TABLE DES MATIÈRES

NOTION 1

CALCUL ALGÉBRIQUE ET ÉQUATIONS

§ 1. Calcul algébrique

a. Expression polynomiale

EXEMPLE

- L'expression algébrique $4x^2 - 3x + 5$ est une expression polynomiale du second degré.
  Le terme $4x^2$ est le monôme de degré 2 et son coefficient est le réel 4.
  Le terme $-3x$ est le monôme de degré 1 et son coefficient est le réel -3.
  Le terme 5 est le monôme de degré 0 ou le terme constant.

b. Distributivité

PROPRIÉTÉ

Pour n'importe quels réels a, b, c, d et k :

$$k \times (a+b) = ka + kb \qquad (a+b)\times(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

c. Identités remarquables

PROPRIÉTÉ

Pour n'importe quels réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$$

d. Développement, factorisation et réduction

DÉFINITION

- *Développer* une expression polynomiale, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
- *Factoriser* une expression polynomiale, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.
- *Réduire* une expression polynomiale, c'est l'écrire sous la forme la plus simple possible.

EXERCICE

1. Développer puis réduire l'expression $\mathrm{E} = (3x-1)(5x+1) - (3x-1)^2$.
2. Factoriser E.
3. Factoriser l'expression $\mathrm{F} = (3x-1)^2 - 25$.

§ 2. Équations du premier degré

a. Équation du premier degré

DÉFINITION

Une *équation du premier degré* est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax+b=0$, où a et b sont deux réels avec $a \neq 0$.

b. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

- Pour n'importe quels réels a, b et x :

$$x+a=b \Leftrightarrow x=b-a$$

- Pour n'importe quels réels $a \neq 0$, b et x :

$$ax=b \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$$

c. Résolution d'une équation du premier degré

MÉTHODE

Pour résoudre une équation du premier degré :

- On développe et on réduit chaque membre.
- On utilise la **PROPRIÉTÉ** précédente.

EXERCICE

Résoudre l'équation (E) : $7x-1=3(x+2)$.

SOLUTION

$$7x-1=3(x+2) \Leftrightarrow 7x-1=3x+6 \Leftrightarrow 7x-3x=6+1 \Leftrightarrow 4x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$$

La solution de l'équation (E) est le réel $\frac{7}{4}$.

§ 3. Équations du second degré

a. Équation du second degré

DÉFINITION

Une *équation du second degré* est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

b. Discriminant du polynôme du second degré

DÉFINITION

Le *discriminant* du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est le réel Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

EXEMPLE

- $2x^2 - 7x - 4$
  On a : $a = 2$, $b = -7$, $c = -4$ et $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 81$.

c. Résolution d'une équation du second degré

PROPRIÉTÉ

On note Δ le discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

REMARQUE

Lorsqu'on peut factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$, on peut directement résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en utilisant le théorème du produit nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

EXERCICE

Résoudre chaque équation :

1. $x^2 - 10x + 16 = 0$.
2. $-x^2 + 2x = 3$.
3. $x(x-1) = 3(x-1)$.
4. $(2x-5)^2 = 0$.

NOTION 2

INÉQUATIONS

§ 1. Intervalles de $\mathbb{R}$

a. Intervalles bornés

NOTATION

On considère deux réels a et b tels que $a \leqslant b$. On note :

- $[a\,;\,b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
- $[a\,;\,b[$ l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.
- $]a\,;\,b]$ l'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$.
- $]a\,;\,b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.

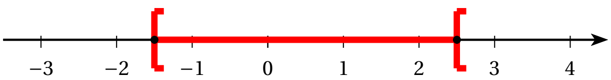
DÉFINITION

- Les ensembles précédents forment les *intervalles bornés* de $\mathbb{R}$.
- Les réels a et b s'appellent les *bornes*.
- L'intervalle $[a\,;\,b]$ est dit *fermé*.
- L'intervalle $]a\,;\,b[$ est dit *ouvert*.
- Les intervalles $[a\,;\,b[$ et $]a\,;\,b]$ sont dits *semi-ouverts*.

EXEMPLE

- L'intervalle $\mathrm{I} = [-1{,}5\,;\,2{,}5[$.

  On représente l'intervalle I sur une droite graduée par un segment semi-ouvert.



b. Intervalles non bornés

NOTATION

On considère un réel a. On note :

- $[a\,;\,+\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$.
- $]a\,;\,+\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $x > a$.
- $]-\infty\,;\,a]$ l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$.
- $]-\infty\,;\,a[$ l'ensemble des réels x tels que $x < a$.

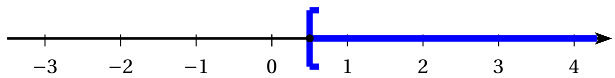
DÉFINITION

Les ensembles précédents forment les *intervalles non bornés* de $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

- L'intervalle $J = [0{,}5\ ;\ +\infty[$.

  On représente l'intervalle J sur une droite graduée par un demi-droite.



§ 2. Inéquations du premier degré

a. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

- Pour n'importe quels réels a, b et x :

$$x + a \leqslant b \Leftrightarrow x \leqslant b - a$$

- Pour n'importe quels réels $a > 0$, b et x :

$$ax \leqslant b \Leftrightarrow x \leqslant \frac{b}{a}$$
$$-ax \leqslant b \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{b}{a}$$

b. Résolution d'une inéquation du premier degré

MÉTHODE

Pour résoudre une inéquation du premier degré :

- On développe et on réduit chaque membre.
- On utilise la **PROPRIÉTÉ** précédente.

EXERCICE

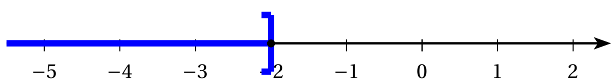
Résoudre l'inéquation (I) : $2x - 5 \geqslant 5x + 1$.

SOLUTION

$$2x - 5 \geqslant 5x + 1 \Leftrightarrow 2x - 5x \geqslant 1 + 5 \Leftrightarrow -3x \geqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{6}{3} \Leftrightarrow x \leqslant -2$$

Les solutions de l'inéquation (I) sont les réels inférieurs ou égaux à -2.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$.



c. Tableau de signes de $ax+b$

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$, et x_0 la solution de l'équation $ax+b=0$.

- Si $a>0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

- Si $a<0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

EXEMPLE

- Tableau de signes de $-\dfrac{2}{3}x+2$

  On résout d'abord l'équation $-\dfrac{2}{3}x+2=0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}x=-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}\times(-2) \Leftrightarrow x=3$.

  Puisque $a<0$, alors, d'après la **PROPRIÉTÉ** précédente :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

§ 3. Inéquations du second degré

a. Tableau de signes de ax^2+bx+c

PROPRIÉTÉ

On note Δ le discriminant du polynôme du second degré ax^2+bx+c.

- Si $\Delta>0$, et en ordonnant les solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2+bx+c=0$, alors :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta=0$ et en notant x_0 la solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$, alors :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta<0$, alors :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

b. Résolution d'une inéquation du second degré

MÉTHODE

Pour résoudre une inéquation du second degré :

- On l'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c$ « comparé à » 0.
- On dresse le tableau de signes de $ax^2 + bx + c$.
- On conclut selon le type de comparaison.

EXERCICE

Résoudre l'inéquation (I) : $2x^2 \geqslant 7x + 4$.

§ 4. Tableau de signes d'un produit ou d'un quotient

a. Tableau de signes d'un produit

EXEMPLE

- Tableau de signes de l'expression $f(x) = (-x+4)(5x+2)$

  On dresse le signe selon les valeurs de x de chacun des facteurs $-x+4$ et $5x+2$ et on utilise la règle des signes d'un produit.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. Tableau de signes d'un quotient

EXEMPLE

- Tableau de signes de l'expression $g(x) = \dfrac{2x-3}{3x+5}$

  On dresse le signe selon les valeurs de x de chacun des éléments $2x-3$ et $3x+5$ et on utilise la règle des signes d'un quotient.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

NOTION

3 STATISTIQUES À UNE VARIABLE

§ 1. Moyenne et écart-type

a. Moyenne

EXEMPLE

- Entreprise

  Le tableau ci-dessous indique les salaires des 70 ouvriers, des 20 agents de maîtrise et des 10 cadres d'une entreprise.

Salaire x_i en euros	1 500	2 000	2 500
Effectif n_i	70	20	10

  Le nombre de salariés n est donné par : $n = 70 + 20 + 10 = 100$.

  Le salaire moyen $\overline{x}$ est donné par : $\overline{x} = \dfrac{70 \times 1\,500 + 20 \times 2\,000 + 10 \times 2\,500}{100} = 1\,700$.

  En moyenne, un salarié gagne 1 700 euros.

DÉFINITION

On considère une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)$ de taille $n = \sum n_i$.

La *moyenne* $\overline{x}$ de la série est donnée par la formule :

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

b. Écart-type

DÉFINITION

On considère une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)$ de taille n.

- La *variance* V de la série est donnée par l'une des formules équivalentes :

$$V = \frac{\sum n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

$$V = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

- L'*écart-type* σ de la série est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

EXEMPLE

- Entreprise

  On a : $V = \dfrac{70 \times 1\,500^2 + 20 \times 2\,000^2 + 10 \times 2\,500^2}{100} - 1\,700^2 = 111\,000.$

  On a : $\sigma = \sqrt{111\,000} \simeq 331{,}66.$

  L'écart-type est environ égal à 332 euros.

REMARQUE

Le couple (moyenne; écart-type) donne à la fois :

- Un indicateur de tendance centrale de la série : la moyenne.
- Un indicateur de dispersion de la série : l'écart-type.

Plus l'écart-type est petit, plus les valeurs se concentrent autour de la moyenne, et donc plus cette dernière est significative.

§ 2. Médiane et quartiles

a. Médiane

DÉFINITION

On considère la liste ordonnée $\{a_1 \,;\, \dots \,;\, a_n\}$ des valeurs d'une série statistique de taille n.

- Si n est impair, alors la médiane Me de la série est la valeur de rang central.
- Si n est pair, alors la médiane Me de la série est la demi-somme des deux valeurs de rangs centraux.

EXEMPLE

- Série de notes

  6 7 8 9 10 10 **10** **11** 11 12 13 14 16 18

  Puisque $n = 14$ est pair, alors la médiane Me est la demi-somme des valeurs de rangs 7 et 8.

  On a : $\mathrm{Me} = \dfrac{a_7 + a_8}{2} = \dfrac{10 + 11}{2} = 10{,}5.$

b. Quartiles

DÉFINITION

On considère la liste croissante $\{a_1 \,;\, \dots \,;\, a_n\}$ des valeurs d'une série statistique de taille n.

- Le *premier quartile* Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
- Le *troisième quartile* Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
- L'*intervalle inter-quartile* est l'intervalle $[\mathrm{Q}_1 \,;\, \mathrm{Q}_3]$.
- L'*écart inter-quartile* est le réel $\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1$.

EXEMPLE

- Série de notes

6 7 8 **9** 10 10 10 11 11 12 **13** 14 16 18

On a : 25 % de $n = \frac{1}{4} \times 14 = 3{,}5$. Donc le premier quartile Q_1 est la valeur de rang 4.
On a : $Q_1 = a_4 = 9$.
On a : 75 % de $n = \frac{3}{4} \times 14 = 10{,}5$. Donc le troisième quartile Q_3 est la valeur de rang 11.
On a : $Q_3 = a_{11} = 13$.
L'écart inter-quartile est donné par : $Q_3 - Q_1 = 13 - 9 = 4$.

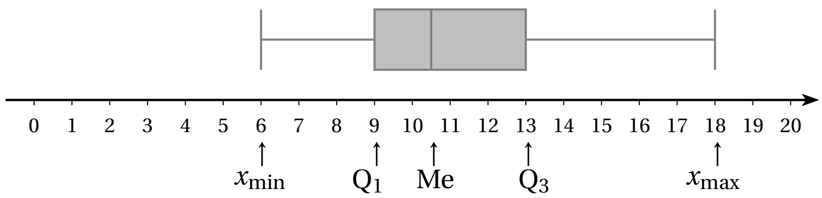
REMARQUE
Le couple (médiane ; écart inter-quartile) donne à la fois :
- Un indicateur de tendance centrale de la série : la médiane.
- Un indicateur de dispersion de la série : l'écart inter-quartile.

Plus l'écart inter-quartile est petit, plus les valeurs centrales de la série se concentrent autour de la médiane.

c. Diagramme en boîtes

EXEMPLE

- Série de notes



NOTION 4

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

§ 1. Fonctions

a. Fonction

EXEMPLE

- Enclos

  On souhaite délimiter un enclos rectangulaire ABCD avec 16 mètres de clôture.

  Le côté [AB] a une longueur variable, notée x, comprise entre 0 et 8 mètres.

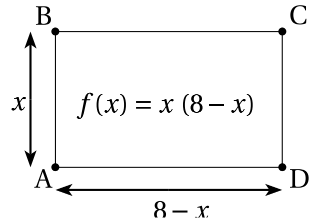
  Le côté [AD] a une longueur qui dépend de x, égale à $8-x$.

  Le rectangle ABCD a une aire qui dépend de x, notée $f(x)$, égale à $x\,(8-x)$.

  Lorsque $x=2$: $f(2)=2\times(8-2)=12$.

  Lorsque $x=3$: $f(3)=3\times(8-3)=15$.

  Lorsque $x=5$: $f(5)=5\times(8-5)=15$.



DÉFINITION

Une *fonction* f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ est un procédé qui à tout réel $x \in \mathbb{E}$ associe un unique réel $f(x)$.

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{E} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- L'ensemble $\mathbb{E}$ est appelé l'*ensemble de définition*.
- Le réel x est appelé la *variable*.
- Le réel $f(x)$ est appelé l'*image* du réel x.
- Le réel x est appelé un *antécédent* du réel $f(x)$.

EXEMPLE

- Enclos

$$\begin{aligned} f\ :\ [0\,;\,8] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=x\,(8-x) \end{aligned}$$

  L'ensemble de définition est l'intervalle $[0\,;\,8]$.

  L'image du réel 2 est le réel 12.

  Des antécédents du réel 15 sont les réels 3 et 5.

b. Tableau de valeurs

EXEMPLE

- Enclos

x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	8
$f(x)$	0	3,75	7	12	15	15,75	16	15	12	0

c. Représentation graphique

DÉFINITION

On considère un repère (O ; I, J) du plan et une fonction f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$.
L'ensemble des points de coordonnées $\left(x\,;\ f(x)\right)$, avec $x \in \mathbb{E}$, noté $\mathscr{C}_f$, s'appelle la *représentation graphique* de la fonction f ou la *courbe représentative* de la fonction f dans le repère (O ; I, J).

CONSÉQUENCE

Pour qu'un point M appartienne à $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que les coordonnées de M vérifient l'équation $y = f(x)$.

On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

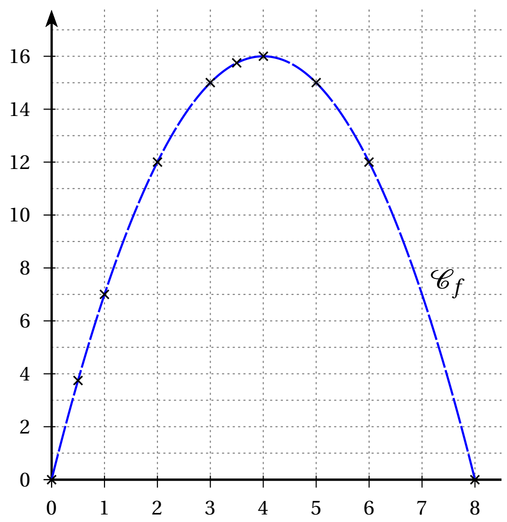
MÉTHODE

Pour représenter graphiquement une fonction f :

- On dresse un tableau de valeurs.
- On place dans un repère les points de coordonnées $\left(x\,;\ f(x)\right)$ obtenus par le tableau.
- On relie « au mieux » les points.

EXEMPLE

- Enclos



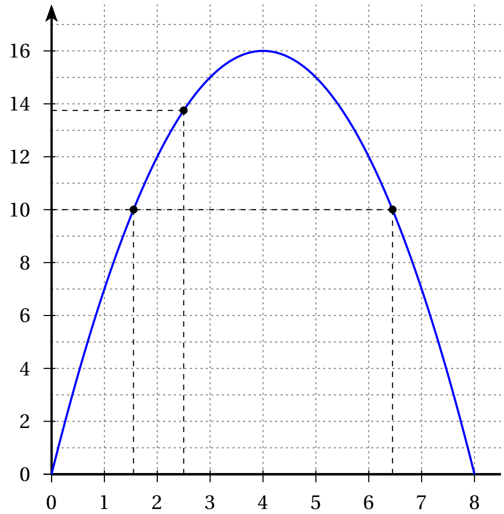
d. Lecture graphique

MÉTHODE

- Pour lire graphiquement l'image d'un réel x par une fonction f, on lit l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse égale à x.
- Pour lire graphiquement les antécédents d'un réel y par une fonction f, on lit les abscisses des points de la courbe de f d'ordonnée égale à y.

EXEMPLE

- Enclos



L'image du réel 2,5 est le réel environ égal à 14.

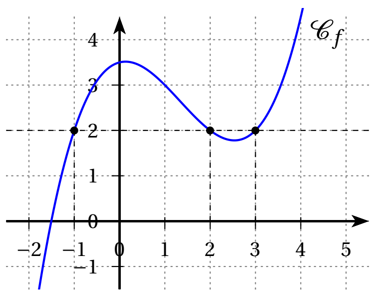
Les antécédents du réel 10 sont les réels environ égaux à 1,5 et 6,5.

§ 2. Résolutions graphiques d'équations

a. Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = k$

EXEMPLE

- La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



Graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les réels -1, 2 et 3, abscisses des points de la courbe d'ordonnée égale à 2.

PROPRIÉTÉ

On considère une fonction f et un réel k. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère.

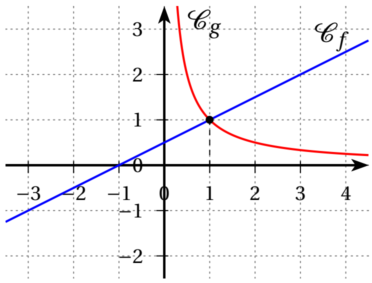
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée égale à k.

Autrement dit, les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les antécédents du réel k.

b. Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = g(x)$

EXEMPLE

- Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g.



Graphiquement la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est le réel 1, abscisse du point d'intersection des deux courbes.

PROPRIÉTÉ

On considère deux fonctions f et g. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes de f et de g dans un repère.

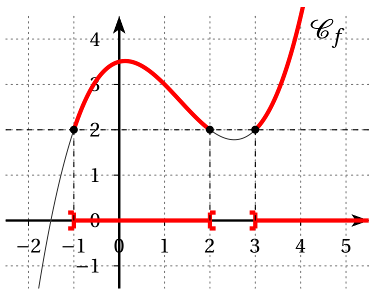
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

§ 3. Résolutions graphiques d'inéquations

a. Résolution graphique d'une inéquation du type $f(x) > k$

EXEMPLE

- La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



Les solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ sont les réels $x \in \,]-1\,;\,2[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$.

PROPRIÉTÉ

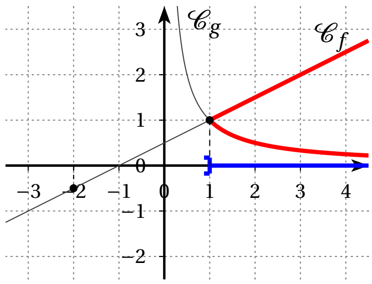
On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{E}$ et un réel k. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère.

Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée supérieure à k.

b. Résolution graphique d'une inéquation du type $f(x) > g(x)$

EXEMPLE

- Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g.



Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les réels $x \in]1\ ;\ +\infty[$.

PROPRIÉTÉ

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle $\mathbb{E}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes de f et de g dans un repère.

Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée supérieure aux points de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.

§ 4. Sens de variations et tableaux de variations

a. Étude du sens de variations d'une fonction

EXEMPLE

- Enclos

  Lorsque x décrit l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, $f(x)$ augmente de la valeur 0 à la valeur 16.
  On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

  Lorsque x décrit l'intervalle $[4\ ;\ 8]$, $f(x)$ diminue de la valeur 16 à la valeur 0.
  On dit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[4\ ;\ 8]$.

DÉFINITION

Étudier le sens de variations d'une fonction consiste à découper son ensemble de définition en une succession d'intervalles les plus larges possibles sur lesquels la fonction est ou bien croissante, ou bien décroissante.

b. Tableau de variations d'une fonction

MÉTHODE

Un *tableau de variations* permet de résumer l'étude du sens de variations de la fonction.

EXEMPLE

- Enclos

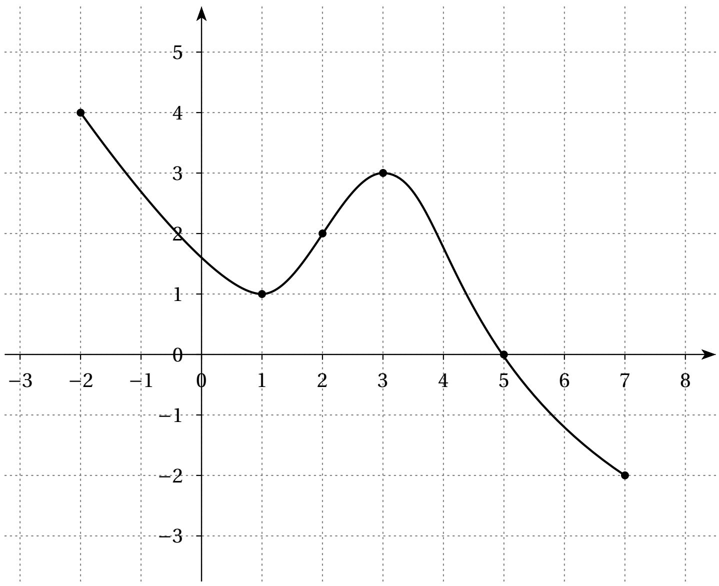
  Le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	0		4		8
$f(x)$	0	↗	16	↘	0

c. Tableau de variations d'une fonction de courbe donnée

EXERCICE

Donner l'ensemble de définition puis dresser le tableau de variations de la fonction f dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



SOLUTION

L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-2 ; 7]$.

Le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	-2		1		3		7
$f(x)$	4	↘	1	↗	3	↘	-2

§ 5. Fonctions monotones

a. Fonction croissante

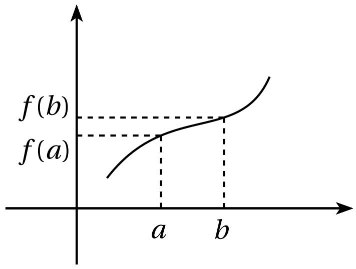
DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{E}$.
On dit que la fonction f est *croissante* sur $\mathbb{E}$ lorsque :

Pour tous réels a et b de $\mathbb{E}$ tels que $a \leqslant b$:

$$f(a) \leqslant f(b)$$

Autrement dit, lorsque x décrit l'intervalle $\mathbb{E}$, $f(x)$ augmente.



EXERCICE

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Fonction décroissante

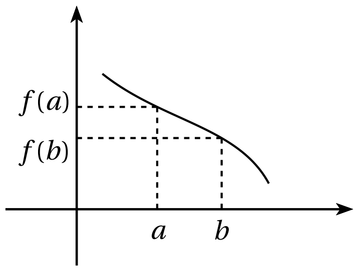
DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{E}$.
On dit que la fonction f est *décroissante* sur $\mathbb{E}$ lorsque :

Pour tous réels a et b de $\mathbb{E}$ tels que $a \leqslant b$:

$$f(a) \geqslant f(b)$$

Autrement dit, lorsque x décrit l'intervalle $\mathbb{E}$, $f(x)$ diminue.



§ 6. Extremums d'une fonction

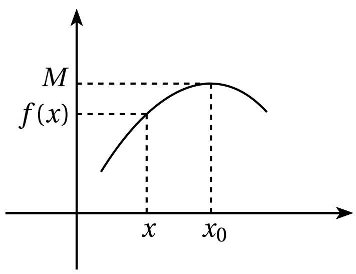
a. Maximum d'une fonction

DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{E}$ et un réel M.
On dit que M est le *maximum* de f sur $\mathbb{E}$, atteint en x_0, lorsque :

Pour tout réel x de $\mathbb{E}$:

$$f(x) \leqslant M \text{ et } f(x_0) = M$$



EXEMPLE

- Enclos
  Le réel 16 est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$, atteint en 4.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $c \in [a\,;\,b]$.

Si f est croissante sur l'intervalle $[a\,;\,c]$ et décroissante sur l'intervalle $[c\,;\,b]$, alors $f(c)$ est le maximum de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

x	a		c		b
$f(x)$		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

b. Minimum d'une fonction

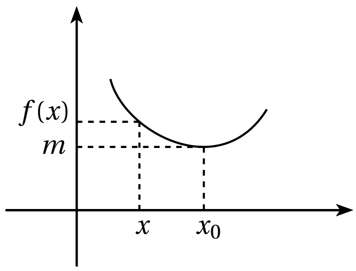
DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{E}$ et un réel m.

On dit que m est le *minimum* de f sur $\mathbb{E}$, atteint en x_0, lorsque :

Pour tout réel x de $\mathbb{E}$:

$f(x) \geqslant m$ et $f(x_0) = m$



EXEMPLE

- Enclos

  Le réel 0 est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$, atteint en 0 et en 8.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $c \in [a\,;\,b]$.

Si f est décroissante sur l'intervalle $[a\,;\,c]$ et croissante sur l'intervalle $[c\,;\,b]$, alors $f(c)$ est le minimum de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

x	a		c		b
$f(x)$		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

NOTION 5

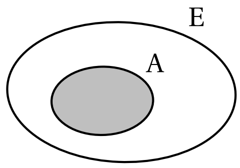
INFORMATIONS CHIFFRÉES

§ 1. Proportions

a. Proportion

DÉFINITION

- Dans une population E, la *proportion* p que représente une sous-population A est le rapport entre l'effectif n_A de la sous-population et l'effectif n_E de la population.



Autrement dit :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

- En multipliant une proportion p par 100, on exprime cette proportion en pourcentage.

EXEMPLE

- Dans un groupe de 20 étudiants, il y a 8 garçons.

  On a : $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{8}{20} = 0{,}40 = 40\ \%$.

  Les garçons représentent 40 % des étudiants du groupe.

PROPRIÉTÉ

Avec les notations précédentes :

$$n_A = p \times n_E \Leftrightarrow n_E = \frac{n_A}{p}$$

EXEMPLE

- Un pot de fromage blanc de 500 g contient 3,6 % de matière grasse.

  On connait la masse de fromage blanc n_E et la proportion de matière grasse p.

  On peut calculer la masse de matière grasse n_A.

  On a : $n_A = p \times n_E = 0{,}036 \times 500 = 18$.

  Il y a 18 g de lipide dans le pot.

- Dans un village, les 54 hommes représentent 45 % de la population du village.

  On connait le nombre d'hommes n_A et la proportion d'hommes dans le village p.

  On peut calculer la population du village n_E.

  On a : $n_\text{E} = \dfrac{n_\text{A}}{p} = \dfrac{54}{0{,}45} = 120$.

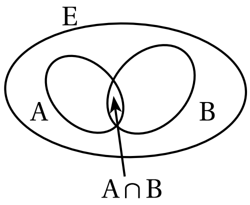
  Il y a 120 habitants dans le village.

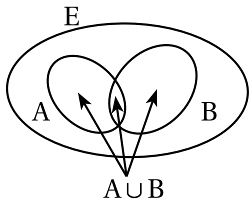
b. Intersection et réunion

DÉFINITION

Soient A et B deux sous-populations d'une population E.

- L'*intersection* de A et de B, notée A ∩ B, est la sous-population de E constituée des individus qui sont **à la fois** dans les deux sous-populations A **et** B.
- La *réunion* de A et de B, notée A ∪ B, est la sous-population de E constituée des individus qui sont **au moins** dans l'une des deux sous-populations A **ou** B.





PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux sous-populations d'une population E. On a :

$$p_{\text{A}\cup\text{B}} = p_\text{A} + p_\text{B} - p_{\text{A}\cap\text{B}}$$

EXEMPLE

- Dans une ville, 10 % des habitants lisent Le Monde, 15 % des habitants lisent L'Equipe, et 3 % lisent les deux. Un même article paraît dans les deux journaux.

  On a : $p_{\text{A}\cup\text{B}} = p_\text{A} + p_\text{B} - p_{\text{A}\cap\text{B}} = 0{,}10 + 0{,}15 - 0{,}03 = 0{,}22$.

  On peut affirmer que 22 % des habitants de la ville ont lu l'article.

REMARQUE

Lorsqu'aucun individu n'est à la fois dans les deux sous-populations A et B, on dit que les sous-populations A et B sont *disjointes* et on a :

$$p_{\text{A}\cup\text{B}} = p_\text{A} + p_\text{B}$$

EXEMPLE

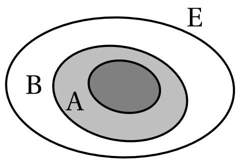
- Dans un groupe où les deux langues sont l'allemand et l'anglais, 40 % des étudiants sont des garçons étudiant l'anglais et 20 % des étudiants sont des garçons étudiant l'allemand.

  On peut affirmer que 60 % des étudiants sont des garçons.

c. Proportions échelonnées

PROPRIÉTÉ

Si $p_{B\,|\,E}$ est la proportion d'une sous-population B dans une population E et $p_{A\,|\,B}$ est la proportion d'une sous-population A dans la sous-population B, alors la proportion $p_{A\,|\,E}$ de la sous-population A dans la population E est égale au produit des proportions $p_{A\,|\,B}$ et $p_{B\,|\,E}$.



Autrement dit :

$$p_{A\,|\,E} = p_{A\,|\,B} \times p_{B\,|\,E}$$

EXEMPLE

- Dans un avion, les européens représentent 70 % des passagers et les français représentent 60 % des européens.

  On connait la proportion d'européens parmi les passagers $p_{B\,|\,E}$ et la proportion de français parmi les européens $p_{A\,|\,B}$.

  On peut calculer la proportion de français parmi les passagers $p_{A\,|\,E}$.

  On a : $p_{A\,|\,E} = p_{A\,|\,B} \times p_{B\,|\,E} = 0{,}60 \times 0{,}70 = 0{,}42$.

  Les français représentent 42 % des passagers.

§ 2. Taux d'évolution

a. Taux d'évolution

DÉFINITION

On considère une grandeur qui évolue de la valeur initiale y_1 à la valeur finale y_2.

- Le *taux d'évolution t* de y_1 à y_2 est donné par la formule :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

- En multipliant un taux par 100, on exprime ce taux en pourcentage.

EXEMPLE

- Un article coûtait 35 € en juin et 42 € en septembre.

  On connait le prix initial y_1 et le prix final y_2.

  On peut calculer le taux d'évolution t.

  On a : $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1} = \dfrac{42 - 35}{35} = 0{,}20 = +20\ \%$.

  Le prix de l'article a augmenté de 20 %.

- Le cours d'une action est passé de 60 € à 57 € en un jour.
  On connait le cours initial y_1 et le cours final y_2.
  On peut calculer le taux d'évolution t.
  On a : $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1} = \dfrac{57-60}{60} = -0{,}05 = -5\ \%$.
  Le cours de l'action a diminué de 5 %.

b. Coefficient multiplicateur

DÉFINITION

On considère une grandeur qui évolue de la valeur initiale y_1 à la valeur finale y_2.

- Le *coefficient multiplicateur* c de y_1 à y_2 est donné par la formule :

$$c = \frac{y_2}{y_1}$$

- Le coefficient multiplicateur c est donc le nombre qui multiplié par y_1 donne y_2.

EXEMPLE

- Un article coûtait 35 € en juin et 42 € en septembre.
  On connait le prix initial y_1 et le prix final y_2.
  On peut calculer le coefficient multiplicateur c.
  On a : $c = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{42}{35} = 1{,}20$.
  Le prix de l'article a été multiplié par 1,20.

PROPRIÉTÉ

Le taux d'évolution t et le coefficient multiplicateur c sont reliés par l'une des deux formules équivalentes :

$$c = 1 + t \Leftrightarrow t = c - 1$$

EXEMPLE

- On suppose que : $t = +5\ \%$.
  On a : $c = 1 + t = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$.
- On suppose que : $t = -20\ \%$.
  On a : $c = 1 + t = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.
- On suppose que : $c = 0{,}91$.
  On a : $t = c - 1 = 0{,}91 - 1 = -0{,}09 = -9\ \%$.

REMARQUE

- Si une grandeur augmente, alors $t > 0$ et $c > 1$.
- Si une grandeur diminue, alors $t < 0$ et $0 < c < 1$.

c. Calcul d'une grandeur

MÉTHODE

On considère une grandeur qui évolue de la valeur initiale y_1 à la valeur finale y_2 et on note t le taux d'évolution de la grandeur. On a :

$$y_2 = (1+t) \times y_1$$
$$y_1 = \frac{y_2}{1+t}$$

EXEMPLE

- Une baguette coûte 1,20 € en juin. Son prix augmente de 15 % durant l'été.
  On connait le prix en initial y_1 et le taux d'évolution t.
  On peut calculer le prix final y_2.
  On a : $y_2 = (1+t) \times y_1 = 1{,}15 \times 1{,}20 = 1{,}38$.
  La baguette coûte 1,38 € en septembre.

- Au bout d'un an, j'ai retiré 936 € d'un capital placé à un taux annuel de 4 %.
  On connait le capital final y_2 et le taux d'évolution t.
  On peut calculer le capital initial y_1.
  On a : $y_1 = \dfrac{y_2}{1+t} = \dfrac{936}{1{,}04} = 900$.
  J'ai placé 900 €.

d. Évolutions successives

REMARQUE

Les taux d'évolution **ne s'additionnent pas** mais les coefficients multiplicateurs **se multiplient**.

$$\begin{tikzcd} y_{\text{initiale}} \arrow[r, "\times c_1"'] \arrow[rr, bend left, "\times c_1 \times c_2"] & {} \arrow[r, "\times c_2"'] & y_{\text{finale}} \end{tikzcd}$$

PROPRIÉTÉ

Si t_1 et t_2 sont les taux de deux évolutions successives, alors le taux d'évolution de la valeur initiale à la valeur finale, appelé le *taux d'évolution global*, est tel que :

$$1 + t_{\text{global}} = (1+t_1) \times (1+t_2)$$

EXEMPLE

- On considère deux hausses successives de 10 %. On a :

$$1 + t_{\text{global}} = (1+t_1) \times (1+t_2) = 1{,}10 \times 1{,}10 = 1{,}21$$
$$t_{\text{global}} = 1{,}21 - 1 = 0{,}21 = +21\ \%$$

  La hausse globale est de 21 %.

e. Évolution réciproque

REMARQUE

Les taux d'évolution **ne s'opposent pas** mais les coefficients multiplicateurs **s'inversent**.

$$y_{\text{initiale}} \underset{\times c}{\overset{\times \frac{1}{c}}{\rightleftarrows}} y_{\text{finale}}$$

PROPRIÉTÉ

Si t est un taux d'évolution de la valeur initiale à la valeur finale, alors le taux d'évolution de la valeur finale à la valeur initiale, appelé le *taux d'évolution réciproque*, est tel que :

$$1 + t_{\text{réc.}} = \frac{1}{1+t}$$

EXEMPLE

- On considère une hausse de 25 %. On a :

$$1 + t_{\text{réc.}} = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}80$$
$$t_{\text{réc.}} = 0{,}80 - 1 = -0{,}20 = -20\ \%$$

  Une hausse de 25 % est compensée par une baisse de 20 %.

f. Évolution moyenne

PROPRIÉTÉ

Si t_{global} est le taux d'évolution global de n évolutions successives, alors le *taux d'évolution moyen* sur une période n fois plus petite est tel que :

$$1 + t_{\text{moyen}} = \left(1 + t_{\text{global}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

EXEMPLE

- En 6 mois, le prix d'un bien de consommation a diminué de 12 %.
  On connait $t_{\text{semestriel}} = -12\ \%$.
  On peut calculer t_{mensuel}.
  On a :

$$1 + t_{\text{mensuel}} = (1 + t_{\text{semestriel}})^{\frac{1}{n}} = 0{,}88^{\frac{1}{6}} \simeq 0{,}978\,9$$
$$t_{\text{mensuel}} \simeq 0{,}978\,9 - 1 \simeq -0{,}021\,1 \simeq -2{,}11\ \%$$

  La baisse mensuelle moyenne est d'environ 2,11 %.

§ 3. Indices

a. Indice simple

DÉFINITION

On considère une grandeur ayant évolué de la valeur de référence y_1 à la valeur y_2 entre deux dates t_1 et t_2. Dire que I_2 est l'*indice simple* à la date t_2 en prenant pour base $I_1 = 100$ à la date de référence t_1 signifie que :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

Autrement dit, il y a proportionnalité entre les indices et les valeurs.

MÉTHODE

Avec les notations précédentes et pour calculer I_2, on utilise la formule :

$$I_2 = I_1 \times \frac{y_2}{y_1}$$

EXEMPLE

- Le cours d'une action est passé de 45 € à 54 € entre 2017 et 2018.

  On connait $I_1 = 100$, $y_1 = 45$ et $y_2 = 54$.

  On peut calculer I_2.

  On a : $I_2 = I_1 \times \dfrac{y_2}{y_1} = 100 \times \dfrac{54}{45} = 120$.

  L'indice simple en 2018 en prenant pour base 100 en 2017 est égal à 120.

REMARQUE

Les indices simples permettent de lire rapidement le taux d'évolution d'une grandeur depuis la date de référence.

b. Lien entre indice simple et taux d'évolution

PROPRIÉTÉ

Le taux d'évolution entre deux valeurs est égal au taux d'évolution entre les indices associés. On a donc :

$$t = \frac{I_2 - I_1}{I_1}$$

$$I_2 = (1+t) \times I_1$$

$$I_1 = \frac{I_2}{1+t}$$

NOTION 6

FONCTIONS USUELLES

§ 1. Fonctions affines

a. Fonction affine

DÉFINITION

Une *fonction affine* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels donnés.

b. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels et f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

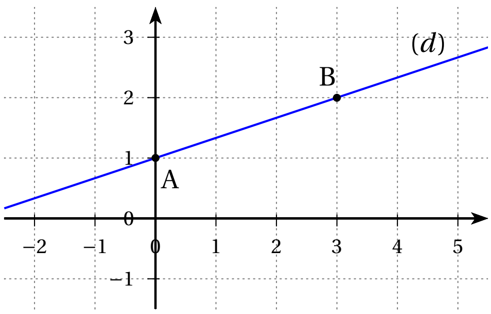
La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère (O ; I, J) est une droite.

EXEMPLE

- Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$.
  On choisit deux valeurs de x et on calcule leur image par f :

x	0	3
$f(x)$	1	2

  La courbe de f est la droite (d) passant par les points A(0 ; 1) et B(3 ; 2).



§ 2. Fonction carrée

a. Fonction carrée

DÉFINITION

La *fonction carrée* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

EXEMPLE

- $f(0{,}1) = 0{,}1^2 = 0{,}01$.
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.
- $f(-5) = (-5)^2 = 25$.

b. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

La fonction carrée est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

COROLLAIRE

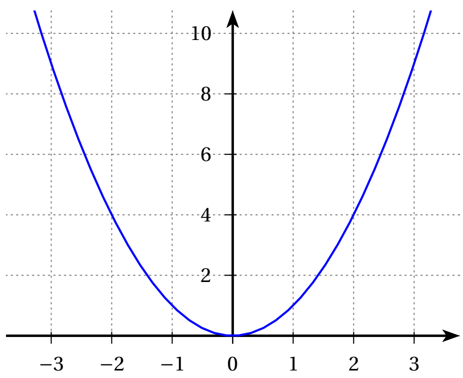
Le réel 0 est le minimum de la fonction carrée, atteint en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

c. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

La courbe représentative de la fonction carrée dans un repère orthogonal (O ; I, J) est une *parabole* de sommet O et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.



§ 3. Fonction inverse

a. Fonction inverse

DÉFINITION

La *fonction inverse* est la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

EXEMPLE

- $f(4) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.
- $f(-5) = \dfrac{1}{-5} = -0{,}2$.

b. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

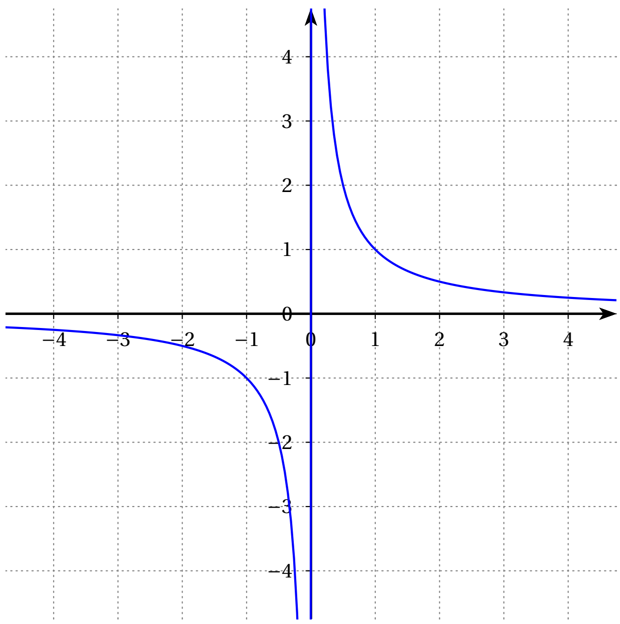
La fonction inverse est décroissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

c. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère (O ; I, J) est une *hyperbole* de centre de symétrie l'origine O.



§ 4. Fonction racine carrée

a. Fonction racine carrée

DÉFINITION

La *fonction racine carrée* est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

EXEMPLE

- $f(81)=\sqrt{81}=9$.
- $f\left(\dfrac{9}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$.
- $f(2)=\sqrt{2}\simeq 1{,}41$.

b. Sens de variations

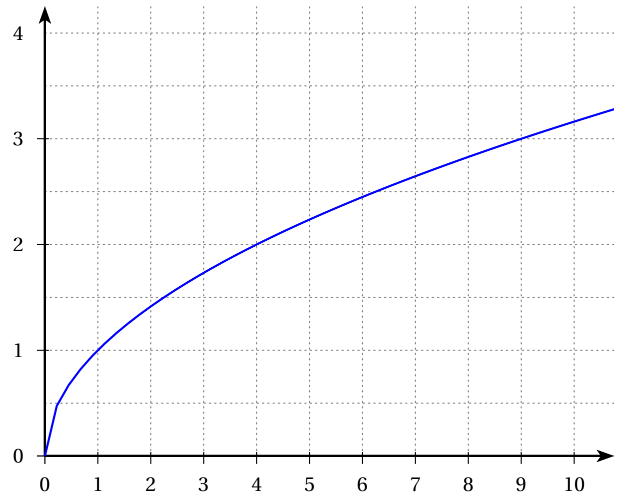
PROPRIÉTÉ

La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

c. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

La courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthogonal (O ; I, J) est une portion de parabole.



§ 5. Fonctions polynômes du second degré

a. Fonction polynôme du second degré

DÉFINITION

Une *fonction polynôme du second degré* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois réels, avec $a\neq 0$.

b. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

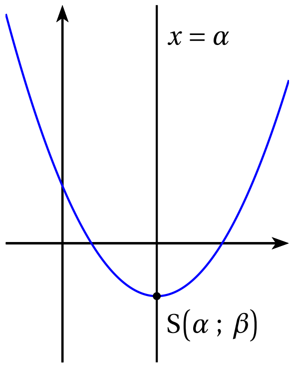
On considère trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On note α et β les réels définis par $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

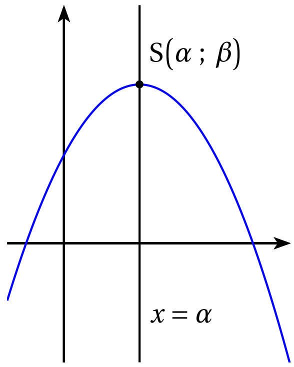
La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une *parabole* de *sommet* S de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

- Si $a > 0$:



branches « tournées vers le haut »

- Si $a < 0$:



branches « tournées vers le bas »

c. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

On considère trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On note α et β les réels définis par $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de la fonction f est β, atteint en α.

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Le maximum de la fonction f est β, atteint en α.

§ 6. Fonction exponentielle

a. Fonction exponentielle

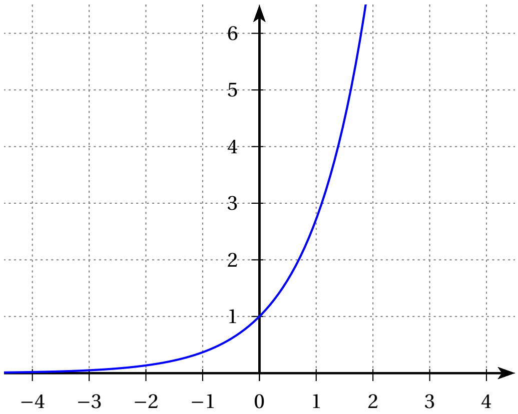
DÉFINITION

La *fonction exponentielle* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

b. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

La représentation graphique de la fonction exponentielle dans un repère (O ; I, J) est une *courbe exponentielle* qui passe par le point de coordonnées (0 ; 1).



c. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d. Positivité

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

e. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :

- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
- $\mathrm{e}^{-b} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$

§ 7. Fonction logarithme népérien

a. Fonction logarithme népérien

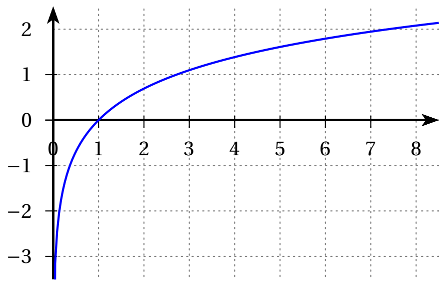
DÉFINITION

- Soit x un réel strictement positif.
  Le *logarithme népérien* de x, noté $\ln(x)$, est l'unique réel y tel que $e^y = x$.
- La *fonction logarithme népérien* est la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

b. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

La représentation graphique de la fonction logarithme népérien dans un repère (O ; I, J) est une *courbe logarithmique* qui passe par le point de coordonnées (1 ; 0).



c. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Signe de $\ln(x)$

PROPRIÉTÉ

- Si $0 < x < 1$, alors $\ln(x) < 0$.
- Si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$.

e. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et pour tout entier relatif n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

NOTION 7

PROBABILITÉS

§ 1. Probabilités

a. Univers

DÉFINITION

- Une *expérience aléatoire* est une expérience qui conduit à des résultats sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé une *issue*.
- L'ensemble des issues, noté Ω, est appelé l'*univers*.

EXEMPLE

- Dé non pipé

  On lance un dé parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6.

  On note le numéro obtenu.

  On a : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- Boules de couleur

  On tire une boule au hasard dans une urne contenant 4 boules bleues, 2 boules jaunes et 1 boule verte.

  On note la couleur de la boule tirée.

  On a : $\Omega = \{b ; j ; v\}$.

b. Loi de probabilité

DÉFINITION

On note $\Omega = \{e_1 ; \dots ; e_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

On définit une *loi de probabilité* sur Ω lorsqu'on associe à chaque issue e_i un réel positif ou nul $p(e_i)$ appelé la *probabilité* de l'issue e_i, de telle sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$$

PROPRIÉTÉ

Dans une situation d'équiprobabilité sur Ω, on a :

$$p(e_1) = \dots = p(e_n) = \frac{1}{n}$$

EXEMPLE

- Dé non pipé
  Le dé étant parfaitement équilibré, on conçoit une situation d'équiprobabilité.
  On définit sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ la loi de probabilité :

Issue e_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(e_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Boules de couleur
  On définit sur $\Omega = \{b ; j ; v\}$ la loi de probabilité :

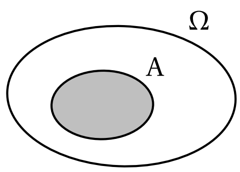
Issue e_i	b	j	v
Probabilité $p(e_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

c. Événement

DÉFINITION

On considère un univers Ω.

- On appelle *événement* toute partie A de Ω.



- On appelle *événement élémentaire* tout événement à une seule issue.
- L'univers Ω est appelé l'*événement certain*.
- L'ensemble vide $\emptyset$ à zéro issue est appelé l'*événement impossible*.

d. Probabilité d'un événement

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{e_1 ; \dots ; e_n\}$ et un événement A.
La *probabilité de l'événement* A, notée $p(\mathrm{A})$, est la somme des probabilités des issues de A.

EXEMPLE

- Boules de couleur
  Soit A l'événement : « la boule tirée est une couleur primaire ».
  On a : $\mathrm{A} = \{b ; j\}$ et $p(\mathrm{A}) = p(b) + p(j) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

PROPRIÉTÉ

Dans une situation d'équiprobabilité sur Ω, on a :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega} = \frac{\textit{cas favorables}}{\textit{cas possibles}}$$

EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  On a : $\mathrm{A} = \{3\ ;\ 6\}$ et $p(\mathrm{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

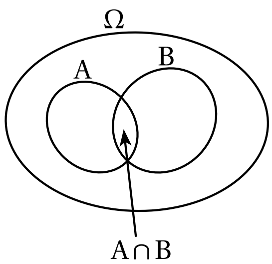
§ 2. Calcul de probabilités

a. Intersection de deux événements

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur Ω et deux événements A et B.

L'*événement intersection* de A et de B, noté A ∩ B, est la partie de Ω constituée des issues qui sont **à la fois** dans les deux événements A **et** B.



EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  Soit B l'événement : « le numéro est supérieur ou égal à 4 ».

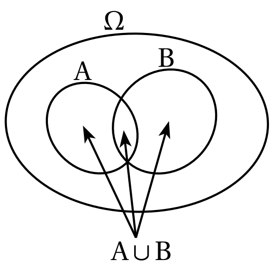
  On a : $\mathrm{A} = \{3\ ;\ \mathbf{6}\}$; $\mathrm{B} = \{4\ ;\ 5\ ;\ \mathbf{6}\}$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\mathbf{6}\}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{6}$.

b. Réunion de deux événements

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur Ω et deux événements A et B.

L'*événement réunion* de A et de B, noté A ∪ B, est la partie de Ω constituée des issues qui sont **au moins** dans l'un des deux événements A **ou** B.



EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  Soit B l'événement : « le numéro est supérieur ou égal à 4 ».

  On a : $A = \{\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{6}\}$; $B = \{\mathbf{4}\ ;\ \mathbf{5}\ ;\ \mathbf{6}\}$; $A \cup B = \{\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{4}\ ;\ \mathbf{5}\ ;\ \mathbf{6}\}$ et $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ

Pour n'importe quels événements A et B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  Soit B l'événement : « le numéro est supérieur ou égal à 4 ».

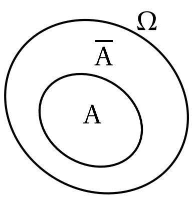
  On a bien $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ car $\frac{4}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$.

c. Événement complémentaire

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur Ω et un événement A.

L'*événement complémentaire* de A, noté $\overline{A}$, est la partie de Ω constituée des issues qui ne sont pas dans A.



PROPRIÉTÉ

Pour n'importe quel événement A :

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

d. Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$.

La *probabilité conditionnelle* de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est donnée par la formule :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

EXEMPLE

- Groupe de 40 individus

Age Sexe	Mineurs (B)	Majeurs ($\overline{\text{B}}$)	Total
Garçons (A)	10	15	25
Filles ($\overline{\text{A}}$)	6	9	15
Total	16	24	40

On choisit au hasard un individu du groupe.
Il y a 25 garçons dans le groupe et il y a 10 garçons mineurs dans le groupe donc :

$$p(\text{A}) = \frac{25}{40} = 0{,}625 \text{ et } p(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{10}{40} = 0{,}25$$

Par conséquent :

$$p_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{A})} = \frac{0{,}25}{0{,}625} = 0{,}40$$

La probabilité que l'individu soit mineur sachant qu'il est un garçon est égale à 40 %.
Ce résultat n'est pas surprenant car il y a 10 mineurs parmi les 25 garçons et $\dfrac{10}{25} = 0{,}40$.

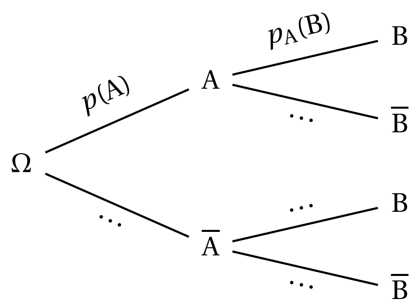
COROLLAIRE

Dans les conditions de la **DÉFINITION** précédente :

$$p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B})$$

REMARQUE

La formule du **COROLLAIRE** se retrouve lorsqu'on conçoit un arbre pondéré :



L'arbre pondéré est constitué :

- De nœuds, sur lesquels sont indiqués des événements.
- De branches, auxquelles sont affectées des probabilités.
- De chemins que l'on assimile à des intersections d'événements.

Par le « chemin du haut » : $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B})$.

NOTION 8

SUITES

§ 1. Suites numériques

a. Suite numérique

EXEMPLE

- Burgers

  Le tableau suivant présente l'évolution de la consommation de burgers, en milliard, par les français entre 2012 et 2015 :

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année	0	1	2	3
Nombre de burgers consommés	0,92	0,97	1,07	1,19

  On note u_n, et on lit « u indice n », le nombre de burgers consommés l'année $2012+n$.

  Ainsi : $u_0 = 0{,}92$; $u_1 = 0{,}97$; $u_2 = 1{,}07$; $u_3 = 1{,}19$.

DÉFINITION

- Une *suite numérique* (u_n) est une liste numérotée de réels. On note :

$$\begin{aligned}(u_n)\ :\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ n &\longmapsto u_n\end{aligned}$$

- L'entier naturel n s'appelle le *rang*.
- Le réel u_n s'appelle le *terme* de rang n.

b. Sens de variations

DÉFINITION

- Une suite (u_n) est une *suite croissante* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.
  Autrement dit, chaque terme est inférieur ou égal au terme suivant.
- Une suite (u_n) est une *suite décroissante* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant u_{n+1}$.
  Autrement dit, chaque terme est supérieur ou égal au terme suivant.

EXEMPLE

- Burgers

  On a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$.

  La consommation de burgers en France entre 2012 et 2015 forme une suite croissante.

§ 2. Modes de génération d'une suite

a. Suite définie par une relation de récurrence

DÉFINITION

Une suite (u_n) est définie par une *relation de récurrence* lorsqu'elle est définie par son premier terme u_0 et par une relation unique qui permet de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.

Autrement dit, il existe une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{I}$ contenant tous les termes u_n telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

EXEMPLE

- Nombres impairs

  La suite des nombres impairs est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2$.

  Par exemple, on a : $u_1 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$ et $u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5$.

b. Suite définie par une relation fonctionnelle

DÉFINITION

Une suite (u_n) est définie par une *relation fonctionnelle* lorsqu'il existe une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$.

EXEMPLE

- Nombres impairs

  La suite des nombres impairs est définie par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x) = 2x + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2n + 1$.

  Par exemple, on a : $u_{1\,000} = 2 \times 1\,000 + 1 = 2\,001$ et $u_{2\,018} = 2 \times 2\,018 + 1 = 4\,037$.

c. Étude du sens de variations d'une suite

MÉTHODE

- Pour étudier le sens de variations d'une suite définie par une relation de récurrence, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Pour étudier le sens de variations d'une suite définie par une relation fonctionnelle $u_n = f(n)$, on peut étudier le sens de variations de la fonction f.

EXERCICE

1. Étudier le sens de variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$.
2. Étudier le sens de variations de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - 5$.

§ 3. Suites arithmétiques

a. Suite arithmétique

DÉFINITION

Soit r un réel.
Une suite (u_n) est une *suite arithmétique* de *raison* r lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

EXEMPLE

- Économies

  Le 1er janvier 2020, j'économise 100 €.

  Chaque 1er jour des mois suivants, j'économise 15 € supplémentaires.

  On note u_n les économies au bout de n mois depuis le 1er janvier 2020.

  Puisque chaque 1er jour du mois, j'économise 15 €, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 15$.

  Par **DÉFINITION**, la suite (u_n) des économies est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = 15$.

CONTRE-EXEMPLE

- Burgers

  On a : $u_1 - u_0 = 0{,}05$ mais $u_2 - u_1 = 0{,}10$.

  La consommation de burgers en France ne forme pas une suite arithmétique.

b. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

- Si la raison d'une suite arithmétique (u_n) est positive, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la raison d'une suite arithmétique (u_n) est négative, alors la suite (u_n) est décroissante.

c. Expression de u_n en fonction de n

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

COROLLAIRE

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, , pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

EXEMPLE

- Économies

  La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 15 donc, par **PROPRIÉTÉ**, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 100 + 15n$.

  Par exemple le 1^er^ janvier 2021, $n = 12$ et $u_{12} = u_0 + 15 \times 12 = 100 + 15 \times 12 = 280$.

  Ainsi, au bout d'un an, j'aurai économisé 280 €.

  Par exemple le 1^er^ janvier 2023, $n = 36$ et $u_{36} = u_{12} + 15 \times (36 - 12) = 280 + 15 \times 24 = 640$.

  Ainsi, au bout de trois ans, j'aurai économisé 640 €.

§ 4. Suites géométriques

a. Suite géométrique

DÉFINITION

Soit q un réel.

Une suite (u_n) est une *suite géométrique* de *raison q* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

EXEMPLE

- Population

  Le 1^er^ janvier 2010, la population d'une ville nouvelle est de 10 000 habitants.

  La population augmente régulièrement de 5 % par an.

  On note u_n la population de la ville au bout de n années depuis le 1^er^ janvier 2010.

  Puisque la population augmente de 5 % par an, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n$.

  Par **DÉFINITION**, la suite (u_n) des populations est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison $q = 1{,}05$.

CONTRE-EXEMPLE

- Burgers

  On a : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{0{,}97}{0{,}92} \simeq 1{,}054$ mais $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1{,}07}{0{,}97} \simeq 1{,}103$.

  La consommation de burgers en France ne forme pas une suite géométrique.

b. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

Soit (u_n) une suite géométrique à termes positifs de raison $q > 0$.

- Si $q \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $q \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

c. Expression de u_n en fonction de n

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = q^n \times u_0$$

COROLLAIRE

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, , pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

EXEMPLE

- Population

  La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 10 000 et de raison 1,05 donc, par **PROPRIÉTÉ**, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1{,}05^n \times 10\,000$.

  Par exemple le 1er janvier 2020, $n = 10$ et $u_{10} = 1{,}05^{10} \times 10\,000 \simeq 16\,289$.

  Ainsi, au bout de dix ans, la population sera d'environ 16 289 habitants.

NOTION 9

VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI BINOMIALE

§ 1. Variables aléatoires

a. Variable aléatoire discrète

DÉFINITION

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

- Une *variable aléatoire* sur Ω est une fonction X qui associe à chaque issue de Ω un réel.
- On note $X(\Omega) = \{x_1 ; \dots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

EXEMPLE

- Jeu de cartes

  Un joueur tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes et perd 5 € lorsque la carte tirée est un nombre pair, perd 4 € lorsque la carte tirée est un nombre impair, et gagne 6 € lorsque la carte tirée est une figure.

  L'ensemble Ω est l'ensemble des 32 cartes.

  Le gain du joueur est une variable aléatoire X sur Ω.

  L'ensemble des gains est $X(\Omega) = \{-5 ; -4 ; +6\}$.

b. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Avec les notations précédentes :

- L'*événement* $\{X = x_i\}$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i.
- La *probabilité* $p(X = x_i)$ est la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, notée p_i.
- La *loi de probabilité* de la variable X est l'ensemble des couples $(x_i ; p_i)$:

Valeur x_i	x_1	$\dots$	x_n
Probabilité $p(X = x_i)$	p_1	$\dots$	p_n

EXEMPLE

- Jeu de cartes

  Il y a 8 nombres pairs : 8 et 10 dans chaque couleur.
  Il y a 12 nombres impairs : 7, 9 et As dans chaque couleur.
  Il y a 12 figures dans un jeu de 32 cartes : Valet, Dame et Roi dans chaque couleur Pique,

Cœur, Carreau et Trèfle.

La loi de probabilité sur l'ensemble des gains $X(\Omega) = \{-5\ ;\ -4\ ;\ +6\}$ est donnée par :

Valeur x_i	-5	-4	$+6$
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{8}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{12}{32}$

c. Espérance mathématique et écart-type d'une variable aléatoire

DÉFINITION

- Avec les notations précédentes, l'*espérance mathématique* de la variable X, notée $E(X)$, est définie par :
$$E(X) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$
- La *variance* de la variable aléatoire X, notée $V(X)$, est définie par l'une des formules :
$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$$
$$V(X) = p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_n^2 - E(X)^2$$
- L'*écart-type* de la variable aléatoire X, notée $\sigma(X)$, est définie par :
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)})$$

EXEMPLE

- Jeu de cartes

  On a : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \frac{8}{32} \times (-5) + \frac{12}{32} \times (-4) + \frac{12}{32} \times 6 = -0{,}5$.

  On a : $V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 - E(X)^2 = \frac{8}{32} \times (-5)^2 + \frac{12}{32} \times (-4)^2 + \frac{12}{32} \times 6^2 - (-0{,}5)^2 = 25{,}5$.

  On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{25{,}5} \simeq 5{,}05$.

  Lorsqu'on joue un très grand nombre de fois, on peut perdre en moyenne 0,50 €, à plus ou moins environ 5 € près.

§ 2. Loi binomiale

a. Épreuve de Bernoulli

DÉFINITION

Une *épreuve de Bernoulli* de *paramètre p* est une expérience aléatoire qui n'a que 2 issues possibles :
- Une issue S, appelée *succès*, de probabilité p.
- Une issue $\overline{\text{S}}$, appelée *échec*, de probabilité $1 - p$.

EXEMPLE

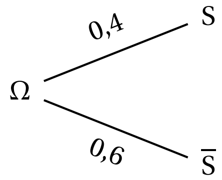
- Urne

  Une urne contient 40 boules blanches et 60 boules noires.

  On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.

  Soit S l'événement : « la boule tirée est blanche ».

  On réalise une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$.



b. Loi de Bernoulli

DÉFINITION

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p à deux issues S et $\overline{\mathrm{S}}$.

La *loi de Bernoulli* de paramètre p est la loi de probabilité de la *variable aléatoire* X à valeurs dans $\{0\ ;\ 1\}$ et comptant le nombre de succès dans l'épreuve de Bernoulli.

EXEMPLE

- Urne

  Le nombre de boules blanches X prend ses valeurs dans $\{0\ ;\ 1\}$ et suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,4.

Valeur k	0	1
Probabilité $p(X = k)$	0,6	0,4

On a : $E(X) = 0{,}6 \times 0 + 0{,}4 \times 1 = 0{,}4$.

On a : $V(X) = 0{,}6 \times 0^2 + 0{,}4 \times 1^2 - 0{,}4^2 = 0{,}24$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}24} \simeq 0{,}49$.

c. Schéma de Bernoulli

DÉFINITION

Un *schéma de Bernoulli* de paramètres n et p est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p d'issues contraires S et E de probabilités p et $1 - p$.

Les issues sont donc des « mots » de n lettres, chaque lettre étant la lettre S ou la lettre E.

EXEMPLE

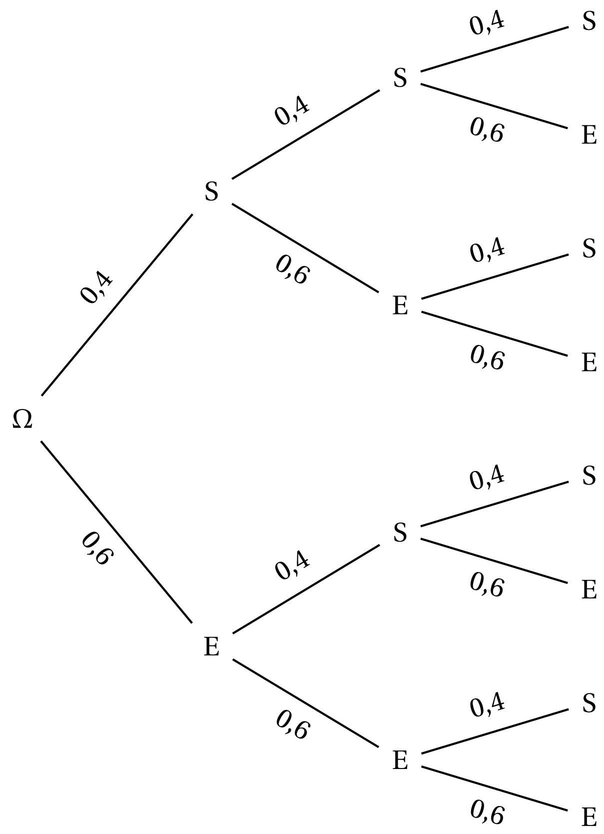
- Urne

  Une urne contient 40 boules blanches et 60 boules noires.

  On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne et on note leur couleur.

Soit S l'événement : « la boule tirée est blanche » lors d'un tirage.

On réalise une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}4$.



Il y a huit issues : Ω = {SSS ; SSE ; SES ; SEE ; ESS ; ESE ; EES ; EEE}.

d. Loi binomiale

DÉFINITION

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

La *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$, est la loi de probabilité de la variable aléatoire X à valeurs dans $\{0\ ;\ 1\ ;\ \cdots\ ;\ n\}$ et comptant le nombre de succès obtenus dans le schéma de Bernoulli.

EXEMPLE

- La loi binomiale $\mathscr{B}(3\ ;\ 0{,}4)$.

Valeur k	0	1	2	3
Probabilité $p(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

On a : $p(X = 0) = p(\text{EEE}) = 1 \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^3 = 0{,}216$.

On a : $p(X = 1) = p(\text{SEE}) + p(\text{ESE}) + p(\text{EES}) = 3 \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 = 0{,}432$.

On a : $p(X = 2) = p(\text{SSE}) + p(\text{SES}) + p(\text{ESS}) = 3 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^1 = 0{,}288$.

On a : $p(X = 3) = p(\text{SSS}) = 1 \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^0 = 0{,}064$.

PROPRIÉTÉ

- L'*espérance mathématique* d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, notée $E(X)$, est donnée par :
$$E(X) = n \times p$$
- L'*écart-type* d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, noté $\sigma(X)$, est donné par :
$$\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$$

EXEMPLE

- La loi binomiale $\mathscr{B}(75\,;\,0{,}4)$.

  On a : $E(X) = n \times p = 75 \times 0{,}4 = 30$.

  On a : $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{75 \times 0{,}4 \times 0{,}6} \simeq 4{,}2$.

  L'écart-type est environ égal à 4,2.

  Si on tire successivement et avec remise 75 boules d'une urne contenant 40 boules blanches et 60 boules noires, on peut espérer tirer 30 boules blanches, à plus ou moins environ 4 boules blanches près.

NOTION 10

DÉRIVATION

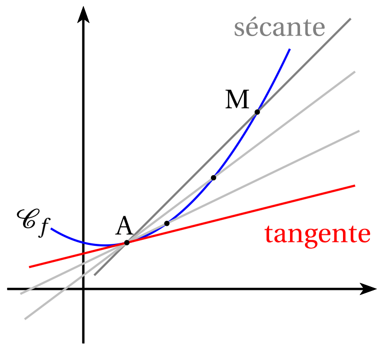
§ 1. Tangente à une courbe et nombre dérivé

a. Tangente à une courbe

DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ et un point A sur la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

- Une *sécante* à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par le point A est une droite qui passe par A et par un autre point M de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La *tangente* à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par le point A est la droite limite des sécantes lorsque le point M tend vers A.



b. Nombre dérivé

REMARQUE

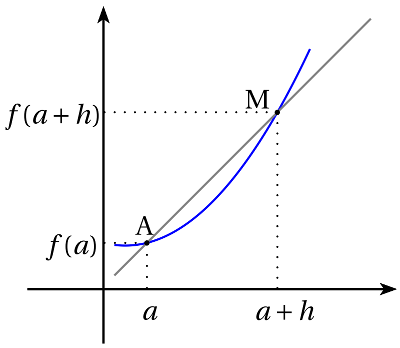
Dans les conditions précédentes :

On note a l'abscisse du point A.

On note h le réel tel que $a+h$ soit l'abscisse du point M.

Le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est donné par :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



DÉFINITION

Dans les conditions précédentes :

- La fonction f est *dérivable* en a lorsque le taux de variation de f entre a et $a+h$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.
  On note alors :
  $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- Le réel $f'(a)$ s'appelle le *nombre dérivé* de f en a.

c. Équation de la tangente à une courbe

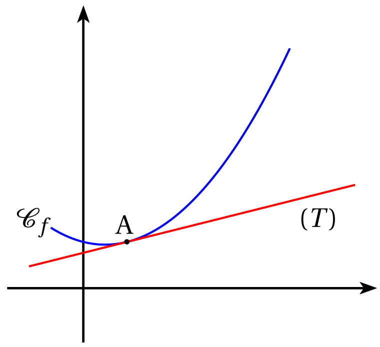
PROPRIÉTÉ

Dans les conditions précédentes :

Si la fonction f est dérivable en a, la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur le réel $f'(a)$.

Autrement dit :

$$(T) : y = mx + p \text{ avec } \begin{cases} m = f'(a) \\ p = f(a) - f'(a) \times a \end{cases}$$



§ 2. Fonctions dérivées

a. Fonction dérivée

DÉFINITION

On considère une fonction f dérivable en tout réel $x \in \mathbb{E}$.

- On dit que f est *dérivable* sur $\mathbb{E}$.
- La fonction f' définie sur $\mathbb{E}$ par l'expression $f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée* de f.

b. Fonction dérivée des fonctions usuelles

PROPRIÉTÉ

Fonction f	**Expression $f(x)$**	**Expression $f'(x)$**	**Dérivabilité**
Constante	k	0	sur $\mathbb{R}$
Affine	$ax+b$	a	sur $\mathbb{R}$
Carrée	x^2	$2x$	sur $\mathbb{R}$
Puissance $(n>1)$	x^n	nx^{n-1}	sur $\mathbb{R}$
Inverse	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$
Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	sur $]0\,;\,+\infty[$
Exponentielle	e^x	e^x	sur $\mathbb{R}$
Logarithme	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	sur $]0\,;\,+\infty[$

c. Fonctions dérivées et opérations

PROPRIÉTÉ

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle $\mathbb{I}$, de fonctions dérivées u' et v', et un réel k.

Forme de la fonction f	Fonction dérivée f'	Dérivabilité
ku	ku'	sur $\mathbb{I}$
$u+v$	$u'+v'$	sur $\mathbb{I}$
uv	$u'v+uv'$	sur $\mathbb{I}$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	sur $\mathbb{J}\subset\mathbb{I}$ où $v\neq 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	sur $\mathbb{J}\subset\mathbb{I}$ où $v\neq 0$
u^n $(n>1)$	$nu'u^{n-1}$	sur $\mathbb{I}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$	sur $\mathbb{I}$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	sur $\mathbb{J}\subset\mathbb{I}$ où $u>0$

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$.
  La fonction f est de la forme uv avec u et v définies par $u(x)=2x+1$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
  Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
  Pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$:

$$u'(x)=2$$
$$v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$
$$f'(x)=2\times\sqrt{x}+(2x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x}{2\sqrt{x}}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-3x+2)^5$.
  La fonction f est de la forme u^n avec u définie par $u(x)=-3x+2$ et $n=5$.
  La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$u'(x)=-3$$
$$f'(x)=5\times u'(x)\times(u(x))^4$$
$$f'(x)=5\times(-3)\times(-3x+2)^4=-15(-3x+2)^4$$

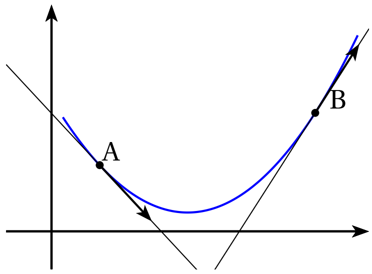
§ 3. Étude du sens de variations d'une fonction

a. Dérivée d'une fonction monotone

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbb{E}$.

- Si f est croissante sur $\mathbb{E}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur $\mathbb{E}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.



b. Signe de la dérivée et sens de variations

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbb{E}$.

- Si, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{E}$.
- Si, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{E}$.

MÉTHODE

Pour étudier le sens de variations d'une fonction dérivable f de fonction dérivée f' :

- On calcule la fonction dérivée f' de la fonction f.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On utilise le **THÉORÈME** précédent.

EXERCICE

Étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,10]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 5$.

SOLUTION

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2\,;\,10]$ et, pour tout $x \in [2\,;\,10]$, on a :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x - 4 = x - 4$$

Le tableau de signes de la fonction dérivée f' et le tableau de variations de la fonction f qui en découle sont donnés par :

x	2		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	15

Le minimum de la fonction f est -3 atteint en 4.

NOTION 11

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

§ 1. Séries statistiques à deux variables

a. Série statistique double

DÉFINITION

Une *série statistique double* est le résultat de l'étude statistique de deux variables X et Y.
On note x_i les valeurs de la variable X et y_i les valeurs correspondantes de la variable Y.

EXEMPLE

- Burgers

Le tableau suivant présente l'évolution de la consommation de burgers, en milliard, par les français entre 2012 et 2015 :

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année x_i	0	1	2	3
Nombre de burgers consommés y_i	0,92	0,97	1,07	1,19

Les variables X et Y sont le rang de l'année et le nombre de burgers consommés.

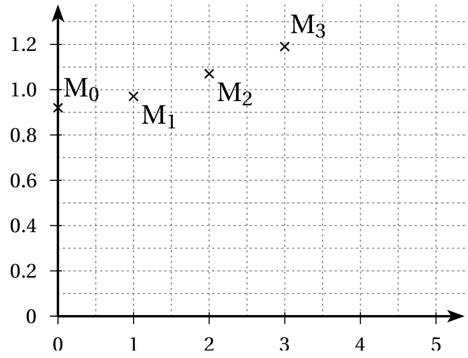
b. Nuage de points

DÉFINITION

Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ est appelé le *nuage de points* associé à la série statistique à deux variables X et Y.

EXEMPLE

- Burgers



§ 2. Ajustements affines

a. Point moyen

DÉFINITION

On note $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes respectives des valeurs des variables X et Y.
Le point G de coordonnées $\left(\overline{x}\ ;\ \overline{y}\right)$ est appelé le *point moyen* du nuage de points associé à la série statistique à deux variables X et Y.

EXEMPLE

- Burger

  On a : $\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3}{4} = 1{,}5$.

  On a : $\overline{y} = \dfrac{0{,}92+0{,}97+1{,}07+1{,}19}{4} = 1{,}037\,5$.

  Le point moyen G est le point de coordonnées (1,5 ; 1,037 5).

b. Ajustement affine

DÉFINITION

Lorsque le nuage de points d'une série statistique double a une forme « allongée », on peut tracer une droite (ou plusieurs) qui passe « le plus près possible » des points du nuage.
On dit qu'une telle droite réalise un *ajustement affine* du nuage de points.

PROPRIÉTÉ

Il existe une unique droite (d) passant par le point moyen du nuage et qui minimise la somme des carrés des « écarts verticaux » des points du nuage à cette droite.
Cette droite (d) est appelée la droite d'*ajustement affine par la méthode des moindres carrés* ou la *droite de régression de y en x*.

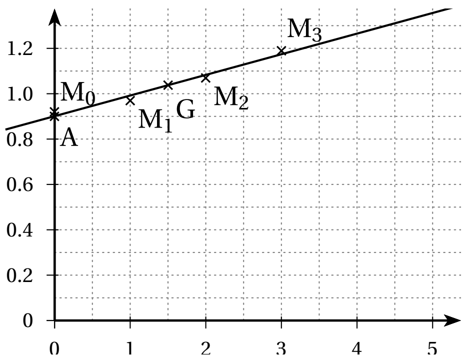
EXEMPLE

- Burgers

  Le nuage de points de la série statistique à deux variables X et Y a une forme « allongée » donc on peut réaliser un ajustement affine du nuage.

  On choisit la droite (d) de régression de y en x et à la calculatrice, on obtient l'équation : $y = 0{,}091x + 0{,}901$.

  La droite (d) passe par les points A(0 ; 0,901) et G(1,5 ; 1,037 5).



c. Estimations à l'aide d'un ajustement affine

EXERCICE

En utilisant la droite de régression (d) :

1. Prévoir le nombre de burgers consommés par les français en 2020.
2. Prévoir en quelle année les français consommeront 2 milliards de burgers.

SOLUTION

1. En 2020, $x = 8$ et $y = 0{,}091 \times 8 + 0{,}901 = 1{,}629$.

   En 2020, les français consommeront 1 milliard 629 millions de burgers.

2. On a par équivalences successives :

$$y = 2 \Leftrightarrow 0{,}091x + 0{,}901 = 2 \Leftrightarrow 0{,}091x = 1{,}099 \Leftrightarrow x \simeq 12$$

   Lorsque $x \simeq 12$, c'est à dire en 2024 environ, les français consommeront 2 milliards de burgers.

NOTION 12

LIMITES ET CONTINUITÉ

§ 1. Limites

a. Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$

DÉFINITION

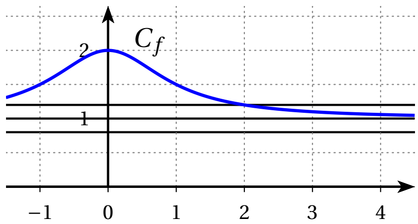
On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe.
On dit que $f(x)$ *tend vers un réel* l *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$, pourvu que x soit assez grand.

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$.
  On conçoit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.



REMARQUE

On définit de la même manière $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

b. Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

DÉFINITION

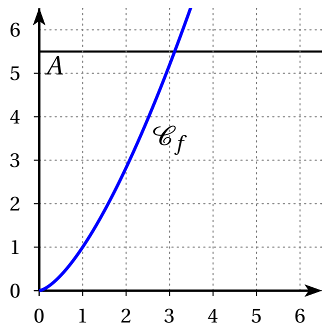
On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe.
On dit que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$, pourvu que x soit assez grand.

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.
  On conçoit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



REMARQUE
On définit de la même manière $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c. Limite infinie en un réel a

DÉFINITION

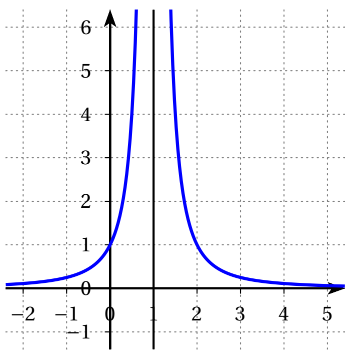
On considère une fonction f définie sur un voisinage d'un réel a. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe.
On dit que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* a et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$, pourvu que x soit assez proche de a.

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.
  On conçoit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.



REMARQUE
On définit de la même manière $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

d. Limite finie en un réel a

DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un voisinage d'un réel a.
On dit que $f(x)$ *tend vers un réel* l *lorsque* x *tend vers* a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$, pourvu que x soit assez proche de a.

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

  Pour tout $x \neq 1$, on a : $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1} = x+2$ de sorte que : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

e. Limite d'une somme

PROPRIÉTÉ

Soient a un réel ou un infini, l et l' deux réels et f et g deux fonctions.
Le tableau suivant indique $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ selon $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

f. Limite d'un produit

PROPRIÉTÉ

Soient a un réel ou un infini, l et l' deux réels non nuls et f et g deux fonctions.
Le tableau suivant indique $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$ selon $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$	l'	0	$+\infty$	$-\infty$
l	$l\times l'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

g. Limite d'un quotient

PROPRIÉTÉ

Soient a un réel ou un infini, l et l' deux réels non nuls et f et g deux fonctions.

Le tableau suivant indique $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ selon $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$	l'	0	$+\infty$	$-\infty$
l	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$ *	0	0
0	0	FI	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ *	FI	FI
$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ *	FI	FI

* Lorsque $g(x)$ garde un signe constant.

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

  Pour tout $x \neq 0$, on a : $x^2 > 0$.

  On a : $\lim\limits_{x\to 0}(2-x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et x^2 garde au voisinage de 0 un signe constant positif.

  Donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

§ 2. Continuité

a. Fonction continue

DÉFINITION

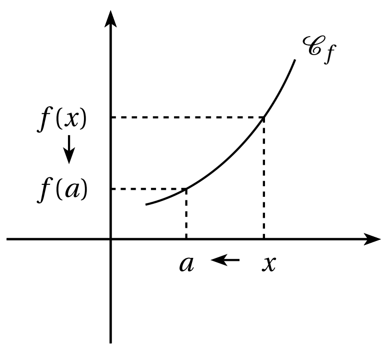
On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathbb{I}$ et un réel $a \in \mathbb{I}$.

- La fonction f est *continue* en a lorsque :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- La fonction f est *continue* sur $\mathbb{I}$ lorsque f est continue pour tout $a \in \mathbb{I}$.

Intuitivement, une fonction f est continue sur un intervalle $\mathbb{I}$ lorsque la courbe de f se trace d'un trait continu, c'est à dire sans lever le crayon.



REMARQUE

Dans la pratique et pour montrer qu'une fonction est continue, on utilisera la **PROPRIÉTÉ** qui suit plutôt que cette **DÉFINITION**.

PROPRIÉTÉ

- Les fonctions usuelles ainsi que les fonctions construites à partir de ces fonctions par une des 4 opérations ou par composition, sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Si f est dérivable sur $\mathbb{I}$, alors f est continue sur $\mathbb{I}$.

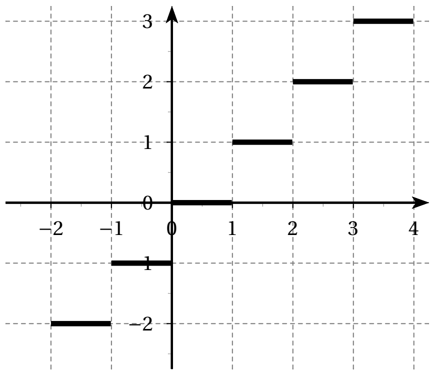
EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{3x-1}$.

  La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ donc f est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

CONTRE-EXEMPLE

- Soit E la *fonction partie entière* définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{E}(x)=n$ où n est l'unique entier relatif tel que $n \leqslant x < n+1$.



La fonction E est discontinue pour tout entier relatif $a \in \mathbb{Z}$.

En effet, on prend par exemple $a=2$.

D'une part : $\lim\limits_{x\to 2^+} \mathrm{E}(x)=2$. D'autre part : $\lim\limits_{x\to 2^-} \mathrm{E}(x)=1$.

Comme $\lim\limits_{x\to 2} \mathrm{E}(x) \neq \mathrm{E}(2)$, alors la fonction partie entière n'est pas continue en 2.

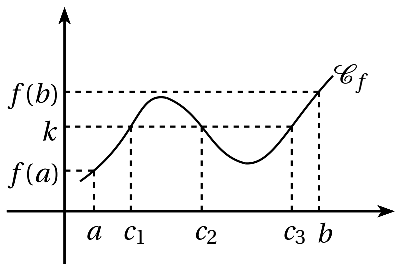
b. Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME

On considère une fonction f continue sur un intervalle $\mathbb{I}$ et deux réels $a \in \mathbb{I}$ et $b \in \mathbb{I}$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

On devine que le réel k est une *valeur intermédiaire* entre les réels $f(a)$ et $f(b)$.



EXEMPLE

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

  La fonction f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

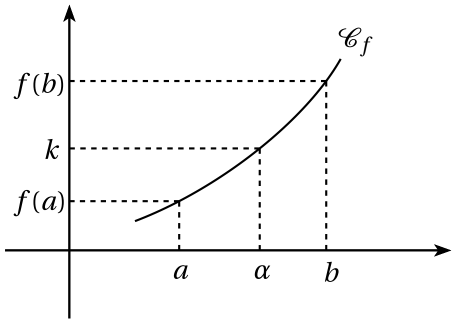
  On a : $f(1) = -2$ et $f(2) = 0$.

  Puisque -1 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre 1 et 2 tel que $f(c) = -1$.

COROLLAIRE

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



REMARQUE

Lorsque $k = 0$, on peut remplacer la condition « k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ » par la condition « $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires » ou par la condition « $f(a) \times f(b) < 0$ ».

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$.

1. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la (ou des) solution(s) trouvée(s).

NOTION
13

LOI NORMALE

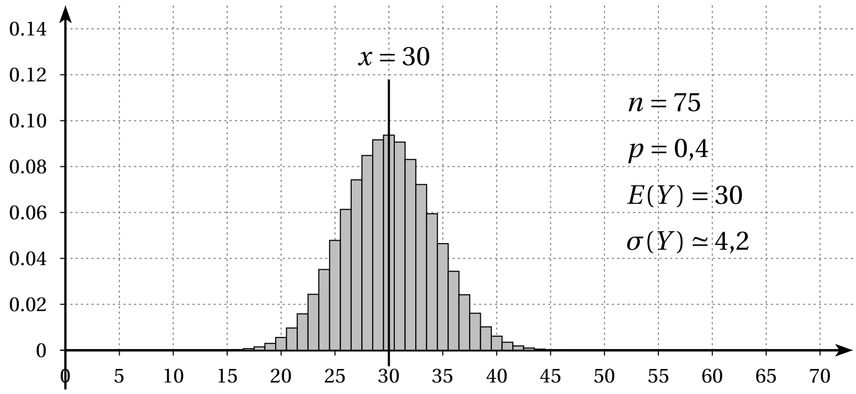
§ 1. Loi normale

a. Approximation de la loi binomiale par la loi normale

REMARQUE

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(75\,;\,0{,}4)$.

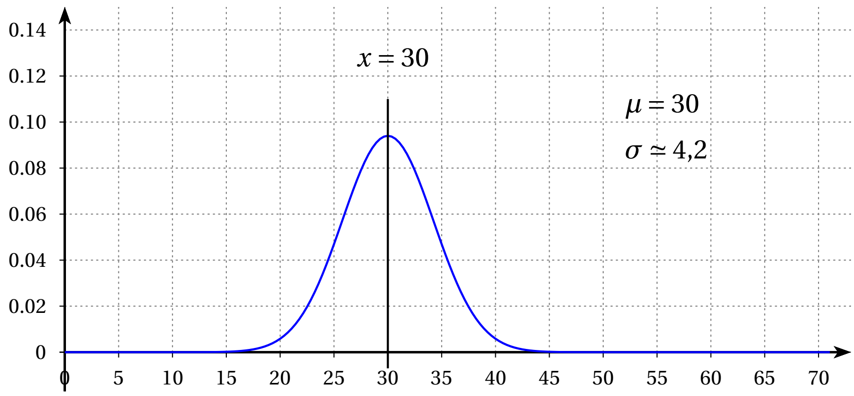
Son diagramme en bâtons, où en abscisses sont placées les valeurs k de Y et en ordonnées les probabilités $p(Y = k)$, prend la forme d'une courbe en cloche, symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 30$.



b. Loi normale

DÉFINITION

La courbe en cloche est la courbe d'une fonction dite *fonction de densité* dont l'aire délimitée par la courbe et l'axe des abscisses définit une loi de probabilité dite *loi normale*.



PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale qui approche une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale.

L'espérance de X, notée μ, est celle de la variable aléatoire Y, et l'écart-type de X, noté σ, est celui de la variable aléatoire Y.

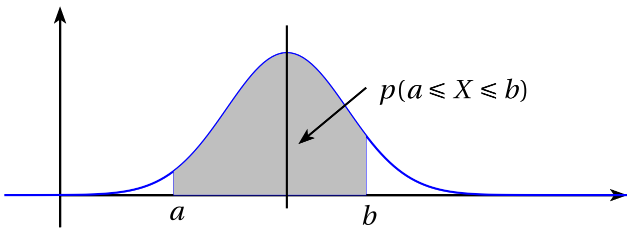
§ 2. Probabilités

a. Calcul de probabilités

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

Pour tout intervalle $[a\,;\,b]$, la probabilité $p(a \leqslant X \leqslant b)$ que X appartienne à l'intervalle $[a\,;\,b]$ est égale à l'aire délimitée par la courbe en cloche, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



MÉTHODE

Dans la pratique et comme la courbe en cloche est la courbe d'une fonction de densité symétrique par rapport à la droite $x = \mu$, on pourra utiliser les résultats suivants :

$$p(X = k) = 0$$
$$p(X \geqslant a) = p(X > a)$$
$$p(X \leqslant b) = p(X < b)$$
$$p(X \leqslant \mu) = p(X \geqslant \mu) = 0,5$$
$$p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a)$$

EXEMPLE

- Dans une coopérative, le diamètre X d'une orange suit la loi normale d'espérance 70 et d'écart-type 3.

  On a : $p(64 \leqslant X \leqslant 76) \simeq 0{,}954\,5 \simeq 95{,}45$ %.

  Environ 95 % des oranges ont un diamètre compris entre 64 mm et 76 mm.

  On a : $p(X \leqslant 76) \simeq 0{,}977\,2 \simeq 97{,}72$ %.

  On peut aussi utiliser : $p(X \leqslant 76) = p(X \leqslant 70) + p(70 \leqslant X \leqslant 76) \simeq 0{,}5 + 0{,}477\,2$.

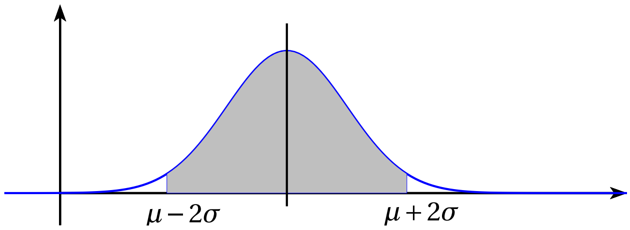
  Environ 98 % des oranges ont un diamètre inférieur à 76 mm.

b. Intervalle à « deux sigmas »

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. On a :

$$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$$



NOTION 14

CALCUL MATRICIEL

§ 1. Matrices

a. Matrice

EXEMPLE

- Entreprise audio

  Une entreprise de distribution de matériel audiovisuel dispose de deux magasins.

  Les tableaux suivants indiquent l'état des stocks dans chaque magasin et les bénéfices réalisés par appareil selon le type de vente.

Stocks	TV	Magnétoscope	Chaîne Hi Fi
Magasin A	6	2	5
Magasin B	4	3	7

Bénéfice en euros	Vente en magasin	Vente soldée
TV	8	7
Magnétoscope	4	3
Chaîne Hi Fi	9	8

  En outre, l'entreprise commercialise ses produits : la TV à 400 euros, le magnétoscope à 100 euros et la chaîne Hi Fi à 500 euros.

  On note $S = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ les stocks, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ les bénéfices, et $P = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$ les prix de vente.

DÉFINITION

On considère deux entiers naturels non nuls m et n.

- Une *matrice colonne* de dimension $m \times 1$ est un tableau de réels à m lignes et 1 colonne.
- Une *matrice ligne* de dimension $1 \times n$ est un tableau de réels à 1 ligne et n colonnes.
- Une *matrice* de dimension $m \times n$ est un tableau de réels à m lignes et n colonnes.
- Une *matrice carrée* d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$.

On note $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

EXEMPLE

- Entreprise audio

  La matrice S est une matrice de dimension 2×3, la matrice B une matrice de dimension 3×2 et la matrice P une matrice colonne de dimension 3×1.

b. Matrice carrée

DÉFINITION

- On considère une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n.
  Les coefficients a_{11} ; ... ; a_{ii} ; ... ; a_{nn} forment la *diagonale principale*.
- La *matrice unité* d'ordre n, notée I_n, est la matrice carrée d'ordre n telle que chaque coefficient soit égal à 1 sur la diagonale principale et égal à 0 ailleurs.
- La *matrice nulle* d'ordre n, notée O_n, est la matrice carrée d'ordre n telle que chaque coefficient soit égal à 0.

EXEMPLE

On a : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Égalité de deux matrices

DÉFINITION

On considère deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même dimension $m \times n$.
On dit que $A = B$ lorsque pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $a_{ij} = b_{ij}$.

§ 2. Opérations sur les matrices

a. Opérations élémentaires sur les matrices

DÉFINITION

On considère deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même dimension $m \times n$.
- La *somme* de A et de B est la matrice $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ de dimension $m \times n$.
- Le *produit* de A *par un réel* k est la matrice $kA = (ka_{ij})$ de dimension $m \times n$.

EXEMPLE

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
  On a : $A + 2B = \begin{pmatrix} 1+2\times 3 & 2+2\times 0 \\ 3+2\times 2 & 4+2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ

Soient A, B et C trois matrices de même dimension et deux réels k et k'. On a :
- $A + B = B + A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $k(A + B) = kA + kB$ et $(k + k')A = kA + k'A$.
- $(kk')A = k(k'A)$.

b. Produit de deux matrices

DÉFINITION

On considère deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{jk})$ de dimensions respectives $m \times n$ et $n \times p$, telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Le produit de A par B est la matrice $A \times B = (c_{ik})$ de dimension $m \times p$ telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$:

$$c_{ik} = a_{i1} \times b_{1k} + \ldots + a_{ij} \times b_{jk} + \ldots + a_{in} \times b_{nk}$$

REMARQUE

Pour effectuer le produit de deux matrices, il est pratique d'adopter la disposition suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{j1} & \ldots & b_{jk} & \ldots & b_{jp} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i1} & \ldots & c_{ik} & \ldots & c_{ip} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mk} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix} = A \times B \end{array}$$

EXEMPLE

- Entreprise audio

  On a : $S \times B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times 8+2\times 4+5\times 9 & 6\times 7+2\times 3+5\times 8 \\ 4\times 8+3\times 4+7\times 9 & 4\times 7+3\times 3+7\times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 88 \\ 107 & 93 \end{pmatrix}$.

  La matrice $S \times B$ indique les bénéfices réalisés dans chaque magasin selon le type de vente.

  On a : $S \times P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times 400+2\times 100+5\times 500 \\ 4\times 400+3\times 100+7\times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,100 \\ 5\,400 \end{pmatrix}$.

  La matrice $S \times P$ indique la valeur des stocks dans chaque magasin.

PROPRIÉTÉ

Soient A, B et C trois matrices carrées de même dimension et un réel k. On a :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $k(A \times B) = (kA) \times B = A \times (kB)$.

REMARQUE

La multiplication n'est pas commutative. Autrement dit : $A \times B \neq B \times A$.

§ 3. Résolution de systèmes

a. Écriture matricielle d'un système linéaire d'équations

REMARQUE

Tout système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme $A \times X = B$ où A est une matrice carrée d'ordre n et X et B sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

EXEMPLE

- $(S) : \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

  Le système (S) peut s'écrire $A \times X = B$ en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b. Matrice inversible

DÉFINITION

On considère une matrice carrée A d'ordre n.
On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée d'ordre n, notée A^{-1}, telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

EXEMPLE

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

  La matrice A est inversible et à l'aide de la calculatrice, on a : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ

Pour qu'une matrice carrée d'ordre deux $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible, il faut et il suffit que son *déterminant* $ad - bc$ soit différent de 0.
Dans ces conditions, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

c. Résolution matricielle d'un système linéaire d'équations

EXERCICE

Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$.

SOLUTION

On utilise le raisonnement : $A \times X = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$.

NOTION 15

ÉCHANTILLONNAGE

§ 1. Intervalle de fluctuation et prise de décision

a. Intervalle de fluctuation

CADRE

- On dispose d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires.

  On sait que la proportion de boules blanches est p.

  On tire successivement et avec remise n boules.

  On note X_n le nombre de boules blanches tirées et F_n la fréquence de boules blanches dans l'échantillon.

  On veut estimer F_n au seuil de 95 %, c'est à dire au risque de 5 %.

PROPRIÉTÉ

Si $n \geqslant 25$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, alors $F_n \in I_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

DÉFINITION

L'intervalle I_n de la **PROPRIÉTÉ** s'appelle l'*intervalle de fluctuation* au *seuil* de 95 % de la fréquence F_n.

b. Prise de décision

CADRE

- On dispose d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires.

  On suppose que la proportion de boules blanches est p et **on veut valider ou invalider** la supposition sur p.

  On tire successivement et avec remise n boules.

  On note X_n le nombre de boules blanches tirées et F_n la fréquence de boules blanches dans l'échantillon.

PROPRIÉTÉ

- Si $F_n \in I_n$, alors on accepte la supposition faite sur la proportion p.
- Si $F_n \notin I_n$, alors on rejette la supposition faite sur la proportion p.

EXERCICE

Une usine fabrique des chamallows en grande quantité.

Une étude interne affirme que la probabilité qu'un chamallow choisi au hasard dans cette production soit « mauvais » est égale à 2 %.

Un client a acheté 1 000 chamallows parmi lesquels 23 étaient « mauvais ». Peut-il remettre en cause l'enquête interne ?

c. Intervalle de fluctuation d'une variable aléatoire suivant une loi normale

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. On a :

$$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$$

DÉFINITION

L'intervalle $[\mu - 2\sigma \,;\, \mu + 2\sigma]$ s'appelle l'*intervalle de fluctuation* au *seuil* de 95 % de la variable aléatoire X.

§ 2. Intervalle de confiance

CADRE

- On dispose d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires.

  On ne connaît pas la proportion p de boules blanches et **on veut estimer** p.

  On tire successivement et avec remise n boules.

  On note X_n le nombre de boules blanches tirées et f la fréquence de boules blanches dans l'échantillon.

PROPRIÉTÉ

Si $n \geqslant 25$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, alors $p \in J_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

DÉFINITION

L'intervalle J_n de la **PROPRIÉTÉ** s'appelle l'*intervalle de confiance* au *seuil* de 95 % de la proportion p.

EXERCICE

Une semaine avant une élection un sondage est effectué sur 1 024 personnes choisis au hasard parmi les 42 821 inscrites sur les listes, 532 déclarent voter pour le candidat **A**.

Le candidat **A** a-t-il raison de penser qu'il va être élu ?