Lycée Jean DROUANT
École Hôtelière de PARIS
20, rue Médéric
75 017 PARIS

OUTILS MATHÉMATIQUES
BTS MHR

Emmanuel DUPUY
Emmanuel-R.Dupuy@ac-paris.fr

PARIS
Année 2021-2022

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

1

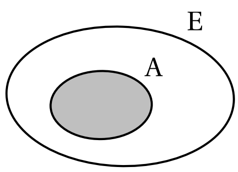
PROPORTIONS ET TAUX D'ÉVOLUTION

Une *proportion* s'exprime par un pourcentage instantané alors qu'un *taux d'évolution* s'exprime par un pourcentage d'évolution.

§ 1. Proportions

CADRE

On considère une partie A d'un tout E. Les ensembles A et E sont généralement des populations ou des quantités.



On note n_{A} et n_{E} les nombres d'éléments ou les valeurs de A et E, selon qu'il s'agit de populations ou de quantités.

a. Proportion

FORMULE

La proportion p que représente la partie A du tout E est donnée par la formule :

$$p = \frac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}}$$

En multipliant p par 100, on exprime la proportion en pourcentage.

EXEMPLE

- Classe de BTS

  Une classe de BTS est composée de 8 filles et 12 garçons.

  On a : $p = \dfrac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}} = \dfrac{8}{20} = 0{,}40 = 40\ \%$.

  Les filles représentent 40 % de la classe.

- Taux de remplissage

  Dans un hôtel de 80 chambres, 50 chambres sont occupées.

  On a : $p = \dfrac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}} = \dfrac{50}{80} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$.

  Le taux de remplissage est égal à 62,5 %.

b. Calcul d'une grandeur

FORMULE

Par des « produits en croix », la formule précédente permet de calculer n'importe laquelle des deux grandeurs n_A ou n_E dès lors qu'on connait la proportion p et l'autre grandeur n_E ou n_A :

$$n_A = p \times n_E$$
$$n_E = \frac{n_A}{p}$$

EXEMPLE

- Réussite au BTS

  Le pourcentage de réussite d'une classe de BTS de 20 étudiants est égal à 90 %.

  On a : $n_A = p \times n_E = 0{,}90 \times 20 = 18$.

  Il y a eu 18 reçus à l'examen.

- Taux d'occupation

  Les 42 clients d'un restaurant occupent 75 % de la salle.

  On a : $n_E = \frac{n_A}{p} = \frac{42}{0{,}75} = 56$.

  Il y a 56 chaises dans la salle de restauration.

§ 2. Taux d'évolution

CADRE

Une grandeur évolue de la valeur initiale V_I à la valeur finale V_F.

a. Taux d'évolution

FORMULE

Le *taux d'évolution* t de V_I à V_F est donné par la formule :

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

En multipliant t par 100, on exprime le taux d'évolution en pourcentage.

EXEMPLE

- Chiffre d'affaires

  Un chiffre d'affaires est passé de 500 000 € à 600 000 €.

  On a : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{600\,000 - 500\,000}{500\,000} = \frac{100\,000}{500\,000} = 0{,}20 = 20\ \%$.

  Le chiffre d'affaires a augmenté de 20 %.

b. Calcul d'une grandeur

FORMULE

Par des « manipulations algébriques », la formule précédente permet de calculer n'importe laquelle des deux valeurs V_F ou V_I dès lors qu'on connait le taux d'évolution t et l'autre valeur V_I ou V_F :

$$V_F = (1+t) \times V_I$$
$$V_I = \frac{V_F}{1+t}$$

EXEMPLE

- Cigarettes

  Un paquet de cigarettes coûte 10,50 €. Une augmentation de 10 % est annoncée.

  On a : $V_F = (1+t) \times V_I = 1{,}10 \times 10{,}50 = 11{,}55$.

  Le paquet de cigarettes coûtera 11,55 €.

- Happy Hour

  Un bar réduit de 20 % ses prix en « Happy Hour » et propose alors la bière pression à 3,40 €.

  On a : $V_I = \dfrac{V_F}{1+t} = \dfrac{3{,}40}{0{,}80} = 4{,}25$.

  La bière coûte habituellement 4,25 €.

c. Prix H.T. et T.T.C.

FORMULE

En notant t le taux de T.V.A., les prix T.T.C. et H.T. sont reliés par les formules :

$$\text{prix T.T.C.} = (1+t) \times \text{prix H.T.}$$
$$\text{prix H.T.} = \frac{\text{prix T.T.C.}}{1+t}$$

EXEMPLE

- Montre

  Une montre est proposée au prix H.T. de 80 € et le taux de T.V.A. est égal à 20 %.

  On a : prix T.T.C. $= (1+t) \times$ prix H.T. $= 1{,}20 \times 80 = 96$.

  Le prix T.T.C. est égal à 96 €.

- Restauration rapide

  Ma note s'élève à 13,20 € lorsque je prends la formule « Plat du Jour » à l'« Atelier du 10 ». Le taux de T.V.A. est égal à 10 %.

  On a : prix H.T. $= \dfrac{\text{prix T.T.C.}}{1+t} = \dfrac{13{,}20}{1{,}10} = 12$.

  Le prix H.T. de la formule est égal à 12 €.

CHAPITRE 2

INTÉRÊTS SIMPLES ET INTÉRÊTS COMPOSÉS

Généralement, le système des *intérêts simples* s'applique aux opérations financières de moins de un an et le système des *intérêts composés* aux opérations financières de plus de un an.

§ 1. Intérêts simples

CADRE

Un capital C est placé à intérêts simples au taux annuel t. Cela signifie que les intérêts sont calculés uniquement sur ce capital.

a. Intérêt acquis

FORMULE

L'*intérêt acquis* I au bout de n jours est donné par la formule :

$$I = \frac{C \times t \times n}{360}$$

EXEMPLE

- Placement

  Vous placez à intérêts simples une somme de 4 500 € sur un livret de caisse d'épargne durant 7 mois au taux annuel de 3 %.

  On a : $I = \frac{C \times t \times n}{360} = \frac{4\,500 \times 0{,}03 \times 7}{12} = 78{,}75$.

  L'intérêt acquis au bout de 7 mois est égal à 78,75 €.

b. Valeur acquise

FORMULE

La *valeur acquise* C_n par le capital C au bout de n jours est donnée par la formule :

$$C_n = C + I$$

EXEMPLE

- Placement

  On a : $C_n = C + I = 4\,500 + 78{,}75 = 4\,578{,}75$.

  La valeur acquise par le capital au bout de 7 mois est égale à 4 578,75 €.

§ 2. Intérêts composés

CADRE

Un capital C est placé à intérêts composés au taux annuel t. Cela signifie que les intérêts générés à la fin de chaque période sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.

a. Valeur acquise

FORMULE

La *valeur acquise* C_n par le capital C au bout de n années est donnée par la formule :

$$C_n = C \times (1+t)^n$$

L'*intérêt acquis* I par le capital C au bout de n années est donné par la formule :

$$I = C_n - C$$

EXEMPLE

- Placement

  Vous placez à intérêts composés une somme de 2 500 € sur un Codevi durant 6 ans au taux annuel de 1,2 %.

  On a : $C_n = C \times (1+t)^n = 2\,500 \times 1{,}012^6 \simeq 2\,685{,}49$.

  Le capital acquis au bout de 6 ans est environ égal à 2 685,49 €.

  On a : $I = C_n - C \simeq 2\,685{,}49 - 2\,500 \simeq 185{,}49$.

  L'intérêt acquis au bout de 6 ans est environ égal à 185,49 €.

b. Valeur actuelle

FORMULE

La *valeur actuelle* C d'un capital C_n dans n années est donnée par la formule :

$$C = \frac{C_n}{(1+t)^n}$$

EXEMPLE

- Inflation

  En supposant une hausse moyenne annuelle des prix égale à 0,8 %, quelle est la valeur actuelle de 1 000 € dans 2 ans ?

  On a : $C = \dfrac{C_n}{(1+t)^n} = \dfrac{1\,000}{1{,}008^2} \simeq 984{,}19$.

  La valeur actuelle de 1 000 € dans 2 ans est environ égale à 984,19 €.

§ 3. Taux proportionnel et taux équivalent

a. Taux proportionnel

FORMULE

Le *taux mensuel i proportionnel* à un taux annuel t est donné par la formule :

$$i = \frac{t}{12}$$

EXEMPLE

- Hausse annuelle de 12 %

  On a : $i = \frac{t}{12} = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01 = 1\ \%$.

  Le taux mensuel proportionnel à une hausse annuelle de 12 % est égal à 1 %.

REMARQUE

On dispose de formules analogues pour calculer le *taux journalier proportionnel*, le *taux trimestriel proportionnel*, le *taux semestriel proportionnel* etc...

b. Taux équivalent

FORMULE

Le *taux mensuel i équivalent* à un taux annuel t est donné par la formule :

$$i = (1+t)^{\frac{1}{12}} - 1$$

EXEMPLE

- Hausse annuelle de 12 %

  On a : $i = (1+t)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1{,}12^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0{,}009\,5 \simeq 0{,}95\ \%$.

  Le taux mensuel équivalent à une hausse annuelle de 12 % est environ égal à 0,95 %.

REMARQUE

On dispose de formules analogues pour calculer le *taux journalier équivalent*, le *taux trimestriel équivalent*, le *taux semestriel équivalent* etc...

CHAPITRE 3

FINANCEMENT ET EMPRUNTS

Les investissements sont généralement financés par des emprunts, qui sont ensuite remboursés par annuités ou mensualités.

Une annuité est la somme de l'amortissement de l'emprunt (part remboursée) et de l'intérêt qui est calculé sur la somme prêtée au cours de la période.

Il existe deux modes de calcul des remboursements : l'amortissement constant (peu utilisé) et l'annuité constante.

§ 1. Amortissement constant

CADRE

Un emprunt E est remboursé par un nombre n d'annuités à un taux d'intérêt t et à amortissement constant.

a. Calcul de l'amortissement

FORMULE

L'*amortissement* A est donné par la formule :

$$A = \frac{E}{n}$$

EXEMPLE

- Emprunt

  Le 1er janvier, un emprunt de 50 000 € est contracté auprès de la banque sur une durée de 5 ans au taux de 2 % et l'amortissement est constant.

  On a : $A = \frac{E}{n} = \frac{50\,000}{5} = 10\,000$.

  L'amortissement constant est égal à 50 000 €.

b. Tableau d'amortissement

FORMULE

En notant E_k l'emprunt restant dû lors de la période k, l'*intérêt* I_k, l'*annuité* a_k et la *valeur nette* V_k sont donnés par les formules :

$$I_k = t \times E_k \quad ; \quad a_k = I_k + A \quad ; \quad V_k = E_k - A$$

EXEMPLE

- Emprunt

Période k	Emprunt restant dû E_k	Intérêt I_k	Amortissement A	Annuité a_k	Valeur nette V_k
1	50 000	1 000	10 000	11 000	40 000
2	40 000	800	10 000	10 800	30 000
3	30 000	600	10 000	10 600	20 000
4	20 000	400	10 000	10 400	10 000
5	10 000	200	10 000	10 200	0

c. Coût de l'emprunt

FORMULE

Le coût de l'emprunt est égal à la somme des intérêts I_k.

EXEMPLE

- Emprunt

  On a : $\sum I_k = 1\,000 + 800 + 600 + 400 + 200 = 3\,000$.

  Le coût de l'emprunt est égal à 3 000 €.

§ 2. Annuité constante

CADRE

Un emprunt E est remboursé par un nombre n d'annuités à un taux d'intérêt t et à annuité constante.

a. Calcul de l'annuité

FORMULE

L'*annuité* a est donnée par la formule :

$$a = E \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

EXEMPLE

- Emprunt

  Le 1er janvier, un emprunt de 50 000 € est contracté auprès de la banque sur une durée de 5 ans au taux de 2 % et l'annuité est constante.

  On a : $a = E \times \dfrac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 50\,000 \times \dfrac{0{,}02}{1-1{,}02^{-5}} \simeq 10\,607{,}92$.

  L'annuité constante est environ égale à 10 607,92 €.

b. Tableau d'amortissement

FORMULE

En notant E_k l'emprunt restant dû lors de la période k, l'*intérêt* I_k, l'*amortissement* A_k et la *valeur nette* V_k sont donnés par les formules :

$$I_k = t \times E_k \qquad ; \qquad A_k = a - I_k \qquad ; \qquad V_k = E_k - A_k$$

EXEMPLE

- Emprunt

Période k	Emprunt restant dû E_k	Intérêt I_k	Amortissement A_k	Annuité a	Valeur nette V_k
1	50 000	1 000	9 607,92	10 607,92	40 392,08
2	40 392,08	807,84	9 800,08	10 607,92	30 592,00
3	30 592,00	611,84	9 996,08	10 607,92	20 595,92
4	20 595,92	411,92	10 196,00	10 607,92	10 399,92
5	10 399,92	208,00	10 399,92	10 607,92	0

c. Coût de l'emprunt

FORMULE

Le coût de l'emprunt est égal à la somme des intérêts I_k.

EXEMPLE

- Emprunt

  On a : $\sum I_k = 1\,000 + 807{,}84 + 611{,}84 + 411{,}92 + 208{,}00 = 3\,039{,}60$.

  Le coût de l'emprunt est égal à 3 039,60 €.

CHAPITRE

4 DROITE DE RÉGRESSION ET DROITE DE MAYER

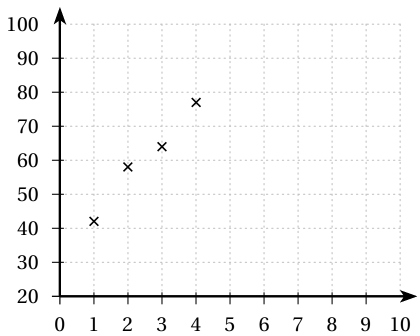
Une grandeur évolue dans le temps, par exemple un chiffre d'affaires.
L'évolution n'est pas linéaire mais on peut dégager une tendance. On peut alors faire des prévisions dans le temps à l'aide d'une *droite d'ajustement* et de son *équation réduite*.

§ 1. Droite de régression

CADRE
Le chiffre d'affaires d'un restaurant a évolué selon le tableau :

Année	Rang x_i	Chiffre d'affaires y_i (en k €)
2017	1	42
2018	2	58
2019	3	64
2020	4	77

On considère le *nuage de points associé* à la série $(x_i ; y_i)$:



a. Point moyen

FORMULE

Les coordonnées $(\overline{x} ; \overline{y})$ du point moyen G du nuage de points sont données par les formules :

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad ; \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

EXEMPLE

- Chiffre d'affaires

  On a : $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$ et $\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{42+58+64+77}{4} = 60{,}25$.

b. Droite de régression

DÉFINITION

La *droite de régression* est la droite qui, parmi toutes les droites qui passent par le point moyen, minimise la somme des carrés des écarts verticaux aux points du nuage associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
On l'appelle également la *droite des moindres carrés*.

FORMULE

Les coefficients a et b de l'équation réduite $y = ax + b$ de la droite de régression du nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$ sont donnés par :

$$a = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2} \qquad ; \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

EXEMPLE

- Chiffre d'affaires

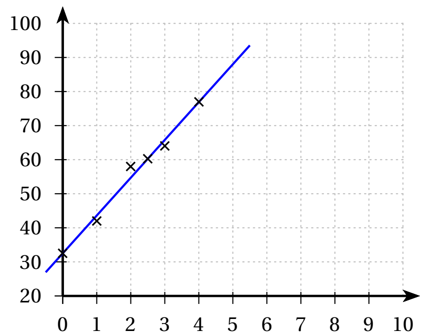
Année	x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$y_i-\overline{y}$	$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$(x_i-\overline{x})^2$
2017	1	42	−1,5	−18,25	27,375	2,25
2018	2	58	−0,5	−2,25	1,125	0,25
2019	3	64	0,5	3,75	1,875	0,25
2020	4	77	1,5	16,75	25,125	2,25

On a : $a = \dfrac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2} = \dfrac{27{,}375+1{,}125+1{,}875+25{,}125}{2{,}25+0{,}25+0{,}25+2{,}25} = \dfrac{55{,}5}{5} = 11{,}1$.

On a : $b = \overline{y} - a\overline{x} = 60{,}25 - 11{,}1 \times 2{,}5 = 32{,}5$.

L'équation de la droite de régression est : $y = 11{,}1x + 32{,}5$.

La droite de régression passe par le point moyen et par le point de coordonnées (0 ; 32,5).



c. Prévisions

EXEMPLE

- Chiffre d'affaires
  En 2021 : $x = 5$ et $y = 11{,}1 \times 5 + 32{,}5 = 88$.
  Le chiffre d'affaire prévisionnel en 2021 est égal à 88 000 €.

§ 2. Droite de Mayer

CADRE

On reprend le cadre du paragraphe précédent.

a. Droite de Mayer

DÉFINITION

La *droite de Mayer* est la droite qui passe par le point moyen des premiers points du nuage et par le point moyen des derniers points du nuage.

FORMULE

En notant $\left(\overline{x_1}\,;\,\overline{y_1}\right)$ et $\left(\overline{x_2}\,;\,\overline{y_2}\right)$ les coordonnées des deux points moyens, les coefficients a et b de l'équation réduite $y = ax + b$ de la droite de Mayer du nuage de points associé à la série $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ sont donnés par :

$$a = \frac{\overline{y_2} - \overline{y_1}}{\overline{x_2} - \overline{x_1}} \quad ; \quad b = \overline{y_1} - a\overline{x_1} = \overline{y_2} - a\overline{x_2}$$

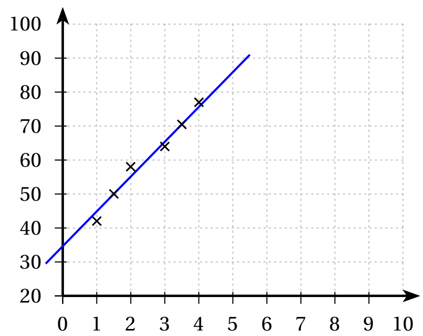
EXEMPLE

- Chiffre d'affaires

  On a : $\overline{x_1} = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$; $\overline{y_1} = \dfrac{42+58}{2} = 50$ et $\overline{x_2} = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$; $\overline{y_2} = \dfrac{64+77}{2} = 70{,}5$.

  On a : $a = \dfrac{\overline{y_2} - \overline{y_1}}{\overline{x_2} - \overline{x_1}} = \dfrac{70{,}5 - 50}{3{,}5 - 1{,}5} = \dfrac{20{,}5}{2} = 10{,}25$ et $b = \overline{y_1} - a\overline{x_1} = 50 - 10{,}25 \times 1{,}5 = 34{,}625$.

  L'équation de la droite de Mayer est : $y = 10{,}25x + 34{,}625$.



b. Prévisions

EXEMPLE

- Chiffre d'affaires

  En 2021 : $x = 5$ et $y = 10{,}25 \times 5 + 34{,}625 = 85{,}875$.

  Le chiffre d'affaire prévisionnel en 2021 est égal à 85 875 €.