Lycée Jean Drouant
École Hôtelière de Paris
20, rue Médéric
75 017 Paris

Cours de Mathématiques
Seconde Pro

Emmanuel Dupuy
Emmanuel-R.Dupuy@ac-paris.fr

Paris
Année 2024-2025

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

PROPORTIONNALITÉ - POURCENTAGES

§ 1. Proportionnalité

a. Grandeurs proportionnelles

DÉFINITION

- Deux *grandeurs* X et Y sont *proportionnelles* lorsqu'on passe des valeurs de X aux valeurs correspondantes de Y en multipliant par un même nombre a.
- Le nombre a s'appelle le *coefficient de proportionnalité*.

EXEMPLE

- Maraîcher

Chez un maraîcher, 1 kg de pommes coûte 2,20 euros.

Le prix des pommes est proportionnel à la quantité de pommes et le coefficient de proportionnalité est égal à 2,2.

Quantité X (en kg)	1	10	5	3	1,5
Prix Y (en euros)	2,20	22	11	6,60	3,30

b. Produits en croix

EXERCICE

A vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle à la durée de parcours et on suppose qu'il faut 3 heures pour parcourir 270 km.

Durée de parcours (en h)	3	x
Distance parcourue (en km)	270	600

Calculer la durée x d'un parcours de 600 km à vitesse constante.

SOLUTION

On utilise la méthode des « produits en croix » : $x = \dfrac{3 \times 600}{270} \simeq 6{,}66$.

Il faut 6 heures et 40 minutes pour parcourir 600 km.

REMARQUE

Même si on peut utiliser d'autres méthodes, la méthode des « produits en croix » est systématiquement gagnante !

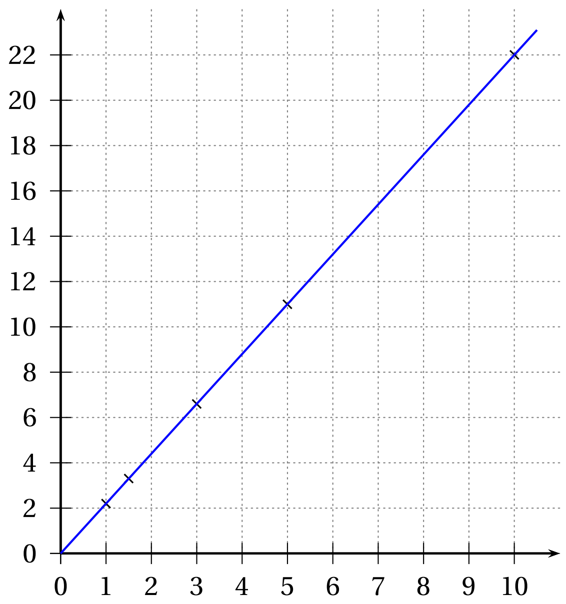
c. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Si deux grandeurs X et Y sont proportionnelles, alors, dans un repère, les points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ sont alignés avec l'origine du repère.

EXEMPLE

- Maraîcher



§ 2. Pourcentages

a. Utilisation d'un pourcentage

EXERCICE

Un salaire de 1 800 euros est augmenté de 2 %.

1. Quel est, en euros, le montant de l'augmentation ?
2. Quel est, en euros, le nouveau salaire ?
3. Comment peut-on passer directement de l'ancien salaire au nouveau salaire ?

SOLUTION

1. On utilise la proportionnalité entre l'augmentation et le salaire :

Salaire (en euros)	1 800	100
Augmentation (en euros)	?	2

On a : $\dfrac{2 \times 1\,800}{100} = \dfrac{2}{100} \times 1\,800 = 0{,}02 \times 1\,800 = 36$.
Le montant de l'augmentation est égal à 36 euros.

2. On a : $1\,800 + 36 = 1\,836$.

   Le nouveau salaire est égal à 1 836 euros.

3. On a : $1{,}02 \times 1\,800 = 1\,836$.

   On peut passer directement de l'ancien salaire au nouveau salaire en multipliant l'ancien salaire par 1,02.

DÉFINITION

Le nombre 1,02 s'appelle le *coefficient multiplicateur* associé à une hausse de 2 %.

b. Calcul d'un pourcentage

EXERCICE

En considérant le tableau :

Prix HT (en euros)	83,25
Prix TTC (en euros)	99,90

1. Quel est, en euros, le montant de la TVA ?
2. Quel est le taux de cette TVA ?

SOLUTION

1. On a : $99{,}90 - 83{,}25 = 16{,}65$. Le montant de la TVA est égal à 16,65 euros.
2. On a : $\dfrac{16{,}65 \times 100}{83{,}25} = \dfrac{16{,}65}{83{,}25} \times 100 = 0{,}20 \times 100 = 20$. Le taux de cette TVA est égal à 20 %.

REMARQUE

On peut aussi calculer directement le taux de la TVA en passant par le coefficient multiplicateur de 83,25 à 99,90.

On a : $\dfrac{99{,}90}{83{,}25} = 1{,}20$ et 1,20 est le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 20 %.

CHAPITRE

2

STATISTIQUES

§ 1. Séries statistiques

a. Série statistique

VOCABULAIRE

- Une *étude statistique* porte sur un *caractère* dans une *population* d'*individus*.
- Un caractère est *quantitatif* lorsqu'il prend des valeurs numériques.
- Un caractère est *discret* lorsqu'il prend un nombre fini de valeurs.
- Un caractère est *continu* lorsqu'il prend une infinité de valeurs.
- Une *série statistique* est l'ensemble des valeurs x_i du caractère associé au nombre correspondant d'individus n_i appelé l'*effectif*.
- La *taille* n d'une série statistique est la somme des effectifs.
- La *fréquence* f_i d'une valeur x_i est le rapport entre n_i et n.

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

EXEMPLE

- Un professeur demande à chacun des élèves de sa classe de seconde combien de téléphones ils ont eus dans leur vie. Les données de la série sont les suivantes :

Valeur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	1	3	6	6	6	3	3	1	0	1

La population est la classe, les individus sont les élèves.

Le caractère est le nombre de téléphone. Il est quantitatif discret et prend des valeurs entières comprises entre 0 et 9.

La taille de la série est égale à 30.

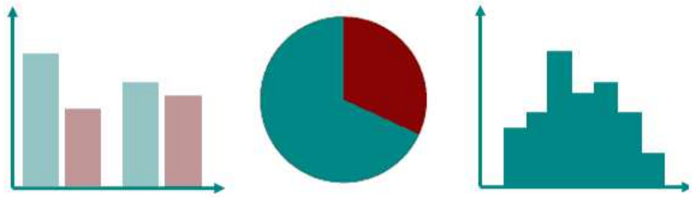
La fréquence de la valeur 4 est égale à $\frac{6}{30} = 0{,}20 = 20\ \%$.

b. Représentations graphiques

MÉTHODE

On peut représenter une série statistique par :

- Un *diagramme en barres*, où les hauteurs sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences.
- Un *diagramme circulaire*, où les angles sont proportionnels aux effectifs ou aux fréquences.
- Un *histogramme*, où les aires sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences.



§ 2. Moyenne et écart-type

a. Moyenne

EXEMPLE

- Entreprise

  Le tableau ci-dessous indique les salaires des 70 ouvriers, des 20 agents de maîtrise et des 10 cadres d'une entreprise.

Salaire x_i en euros	1 500	2 000	2 500
Effectif n_i	70	20	10

  Le nombre de salariés n est donné par : $n = 70 + 20 + 10 = 100$.

  Le salaire moyen $\overline{x}$ est donné par : $\overline{x} = \dfrac{70 \times 1\,500 + 20 \times 2\,000 + 10 \times 2\,500}{100} = \dfrac{170\,000}{100} = 1\,700$.

DÉFINITION

On considère une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)$.

- La *taille* n de la série est la somme des effectifs n_i :

$$n = \sum n_i$$

- La *moyenne pondérée* $\overline{x}$ de la série est donnée par la formule :

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

b. Variance et écart-type

DÉFINITION

On considère une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)$.

- La *variance* V de la série est donnée par la formule :

$$V = \frac{\sum n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

- L'*écart-type* σ de la série est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

EXEMPLE

- Entreprise

  On a : $V = \dfrac{70 \times (1\,500 - 1\,700)^2 + 20 \times (2\,000 - 1\,700)^2 + 10 \times (2\,500 - 1\,700)^2}{100} = 111\,000.$

  On a : $\sigma = \sqrt{111\,000} \simeq 331{,}66.$

  Le salaire moyen est égal à 1 700 euros à plus ou moins 331,66 euros près.

§ 3. Médiane et quartiles

a. Médiane

DÉFINITION

On considère la liste ordonnée $\{a_1 \ ; \ldots ; \ a_n\}$ des valeurs d'une série statistique de taille n.

- Si n est impair, alors la médiane Me de la série est la valeur de rang central.
- Si n est pair, alors la médiane Me de la série est la demi-somme des deux valeurs de rangs centraux.

EXEMPLE

- Série de notes

  6 7 8 9 10 10 **10** **11** 11 12 13 14 16 18

  Puisque $n = 14$ est pair, alors la médiane Me est la demi-somme des valeurs de rangs 7 et 8.

  On a : $\text{Me} = \dfrac{a_7 + a_8}{2} = \dfrac{10+11}{2} = 10{,}5.$

b. Quartiles

DÉFINITION

On considère la liste croissante $\{a_1 \ ; \ldots ; \ a_n\}$ des valeurs d'une série statistique de taille n.

- Le *premier quartile* Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
- Le *troisième quartile* Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
- L'*intervalle inter-quartile* est l'intervalle $[Q_1 \ ; \ Q_3]$.
- L'*écart inter-quartile* est le réel $Q_3 - Q_1$.

EXEMPLE

- Série de notes

  6 7 8 **9** 10 10 10 11 11 12 **13** 14 16 18

  On a : 25 % de $n = \dfrac{1}{4} \times 14 = 3{,}5$. Donc le premier quartile Q_1 est la valeur de rang 4.

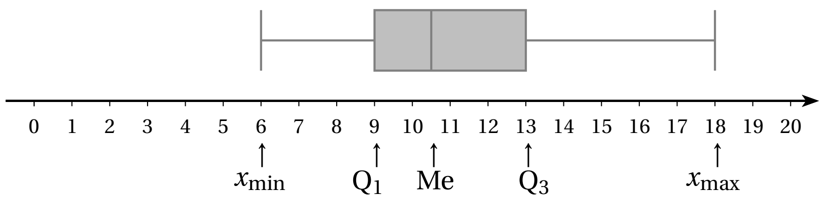
  On a : $Q_1 = a_4 = 9$.

On a : 75 % de $n = \frac{3}{4} \times 14 = 10{,}5$. Donc le troisième quartile Q_3 est la valeur de rang 11.
On a : $Q_3 = a_{11} = 13$.
L'écart inter-quartile est donné par : $Q_3 - Q_1 = 13 - 9 = 4$.

c. Diagramme en boîtes

EXEMPLE

- Série de notes



CHAPITRE 3

FONCTIONS AFFINES

§ 1. Fonctions linéaires

a. Fonction linéaire

DÉFINITION

- Une *fonction linéaire* est une fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = ax$$

  où a est un nombre donné au départ.
- Le nombre a s'appelle le *coefficient directeur*.

EXEMPLE

- Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \frac{1}{2}x$.

  La fonction f est une fonction linéaire de coefficient directeur $a = \frac{1}{2}$.

b. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

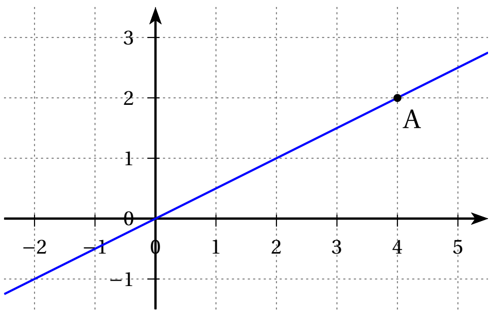
La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite qui passe par l'origine.

EXEMPLE

- Soit f la fonction linéaire définie par l'expression $f(x) = \frac{1}{2}x$.

  On choisit une valeur de x et on calcule son image par f : $f(4) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

  La représentation graphique de f est la droite qui passe par l'origine et par le point A(4 ; 2).



§ 2. Fonctions affines

a. Fonction affine

DÉFINITION

- Une *fonction affine* est une fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = ax + b$$

  où a et b sont deux nombres donnés au départ.
- Le nombre a s'appelle le *coefficient directeur*.
- Le nombre b s'appelle l'*ordonnée à l'origine*.

b. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

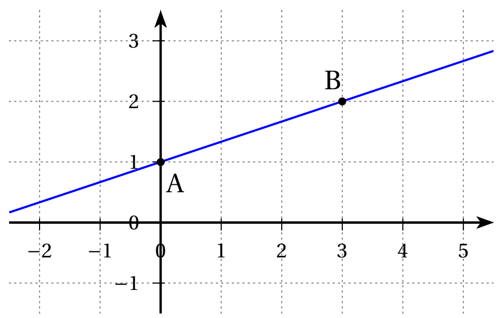
La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.

EXEMPLE

- Soit f la fonction affine définie par l'expression $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$.
  On choisit deux valeurs de x et on calcule leur image par f :

x	0	3
$f(x)$	1	2

  La représentation graphique de f est la droite passant par les points A(0 ; 1) et B(3 ; 2).



c. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction affine définie par l'expression $f(x) = ax + b$.
- Si $a \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante.
- Si $a \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante.

CHAPITRE

4

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

CHAPITRE 5

INFORMATION CHIFFRÉE

§ 1. Proportions

DÉFINITION

- Dans une population E, la *proportion p* que représente une sous-population A est le rapport entre l'effectif n_A de la sous-population et l'effectif n_E de la population.
  Autrement dit :
  $$p = \frac{n_A}{n_E}$$
- En multipliant une proportion p par 100, on exprime cette proportion en pourcentage.

EXEMPLE

- Dans une classe de 20 élèves, il y a 8 garçons.
  On a : $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{8}{20} = 0{,}40 = 40\ \%$.
  Les garçons représentent 40 % des élèves de la classe.

PROPRIÉTÉ

Avec les notations précédentes :

$$n_A = p \times n_E$$
$$n_E = \frac{n_A}{p}$$

EXEMPLE

- Un pot de fromage blanc de 500 g contient 3,6 % de matière grasse.
  On connait la masse de fromage blanc n_E et la proportion de matière grasse p. On peut calculer la masse de matière grasse n_A.
  On a : $n_A = p \times n_E = 0{,}036 \times 500 = 18$.
  Il y a 18 g de lipide dans le pot.
- Dans un restaurant, les 42 clients occupent 75 % de la salle.
  On connait le nombre de clients n_A et la proportion de clients dans la salle p. On peut calculer le nombre de chaises dans la salle n_E.
  On a : $n_E = \frac{n_A}{p} = \frac{42}{0{,}75} = 56$.
  Il y a 56 chaises dans la salle de restauration.

§ 2. Taux d'évolution

a. Taux d'évolution

DÉFINITION

On considère une grandeur qui évolue de la valeur initiale y_1 à la valeur finale y_2.

- Le *taux d'évolution t* de y_1 à y_2 est donné par la formule :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

- En multipliant un taux par 100, on exprime ce taux en pourcentage.

EXEMPLE

- Un article coûtait 35 € en juin et 42 € en septembre.
  On connait le prix initial y_1 et le prix final y_2. On peut calculer le taux d'évolution t.
  On a : $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{42 - 35}{35} = 0{,}20 = +20\ \%$.
  Le prix de l'article a augmenté de 20 %.

- Le cours d'une action est passé de 60 € à 57 € en un jour.
  On connait le cours initial y_1 et le cours final y_2. On peut calculer le taux d'évolution t.
  On a : $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{57 - 60}{60} = -0{,}05 = -5\ \%$.
  Le cours de l'action a diminué de 5 %.

b. Coefficient multiplicateur

DÉFINITION

On considère une grandeur qui évolue de la valeur initiale y_1 à la valeur finale y_2.

- Le *coefficient multiplicateur c* de y_1 à y_2 est donné par la formule :

$$c = \frac{y_2}{y_1}$$

- Le coefficient multiplicateur c est donc le nombre qui multiplié par y_1 donne y_2.

EXEMPLE

- Un article coûtait 35 € en juin et 42 € en septembre.
  On connait le prix initial y_1 et le prix final y_2. On peut calculer le coefficient multiplicateur c.
  On a : $c = \frac{y_2}{y_1} = \frac{42}{35} = 1{,}20$.
  Le prix de l'article a été multiplié par 1,20.

PROPRIÉTÉ

Le taux d'évolution t et le coefficient multiplicateur c sont reliés par l'une des deux formules équivalentes :

$$c = 1 + t$$
$$t = c - 1$$

EXEMPLE

- On suppose que : $t = +5\ \%$.
  On a : $c = 1 + t = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$.
- On suppose que : $t = -20\ \%$.
  On a : $c = 1 + t = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.
- On suppose que : $c = 0{,}91$.
  On a : $t = c - 1 = 0{,}91 - 1 = -0{,}09 = -9\ \%$.

REMARQUE

- Si une grandeur augmente, alors $t > 0$ et $c > 1$.
- Si une grandeur diminue, alors $t < 0$ et $0 < c < 1$.

c. Calcul d'une grandeur

MÉTHODE

On considère une grandeur qui évolue de la valeur initiale y_1 à la valeur finale y_2 et on note t le taux d'évolution de la grandeur. On a :

$$y_2 = (1 + t) \times y_1$$
$$y_1 = \frac{y_2}{1 + t}$$

EXEMPLE

- Une baguette coûte 1,20 € en juin. Son prix augmente de 15 % durant l'été.
  On connait le prix en initial y_1 et le taux d'évolution t. On peut calculer le prix final y_2.
  On a : $y_2 = (1 + t) \times y_1 = 1{,}15 \times 1{,}20 = 1{,}38$.
  La baguette coûte 1,38 € en septembre.

- Au bout d'un an, j'ai retiré 936 € d'un capital placé à un taux annuel de 4 %.
  On connait le capital final y_2 et le taux d'évolution t. On peut calculer le capital initial y_1.
  On a : $y_1 = \dfrac{y_2}{1 + t} = \dfrac{936}{1{,}04} = 900$.
  J'ai placé 900 €.

CHAPITRE

6 FONCTIONS

§ 1. Fonctions

a. Fonction

EXEMPLE

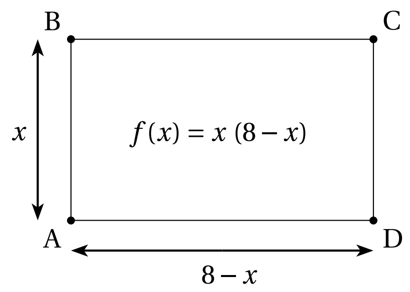
- Enclos

  On souhaite délimiter un enclos rectangulaire ABCD avec 16 mètres de clôture.

  Le côté [AB] a une longueur variable, notée x, comprise entre 0 et 8 mètres.

  Le côté [AD] a une longueur qui dépend de x, égale à $8 - x$.

  Le rectangle ABCD a une aire qui dépend de x, notée $f(x)$, égale à $x\,(8 - x)$.



  Lorsque $x = 2$: $f(2) = 2 \times (8 - 2) = 12$.

  Lorsque $x = 3$: $f(3) = 3 \times (8 - 3) = 15$.

  Lorsque $x = 5$: $f(5) = 5 \times (8 - 5) = 15$.

DÉFINITION

- Une *fonction* f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ est un procédé qui à tout nombre x de $\mathbb{E}$ associe un unique nombre $f(x)$.
- L'ensemble $\mathbb{E}$ est appelé l'*ensemble de définition*.
- Le nombre x est appelé la *variable*.
- Le nombre $f(x)$ est appelé l'*image* du nombre x.
- Le nombre x est appelé un *antécédent* du nombre $f(x)$.

EXEMPLE

- Enclos

  L'ensemble de définition est l'intervalle $[0\,;\,8]$ des nombres compris entre 0 et 8.

  L'image du nombre 2 est le nombre 12.

  Des antécédents du nombre 15 sont les nombres 3 et 5.

b. Tableau de valeurs

EXEMPLE

- Enclos

x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	8
$f(x)$	0	3,75	7	12	15	15,75	16	15	12	0

c. Représentation graphique

DÉFINITION

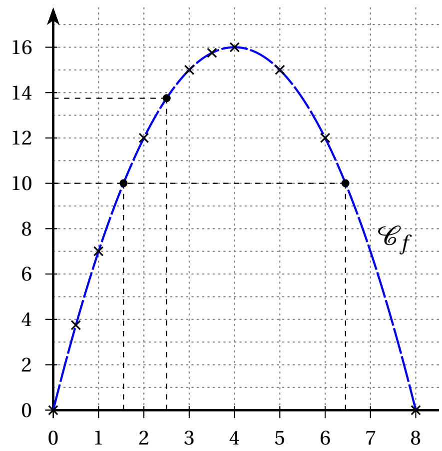
On considère un repère du plan et une fonction f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$.
L'ensemble des points de coordonnées $\big(x\,;\,f(x)\big)$, avec $x \in \mathbb{E}$, s'appelle la *représentation graphique* de la fonction f dans le repère.

MÉTHODE

Pour représenter graphiquement une fonction f :
- On dresse un tableau de valeurs.
- On place dans un repère les points de coordonnées $\big(x\,;\,f(x)\big)$ obtenus par le tableau.
- On relie « au mieux » les points.

EXEMPLE

- Enclos



d. Lecture graphique

MÉTHODE

- Pour lire graphiquement l'image d'un nombre x par une fonction f, on lit l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse égale à x.
- Pour lire graphiquement les antécédents d'un nombre y par une fonction f, on lit les abscisses des points de la courbe de f d'ordonnée égale à y.

EXEMPLE

- Enclos

  L'image du nombre 2,5 est le nombre environ égal à 14.

  Les antécédents du nombre 10 sont les nombres environ égaux à 1,5 et 6,5.

§ 2. Sens de variations d'une fonction

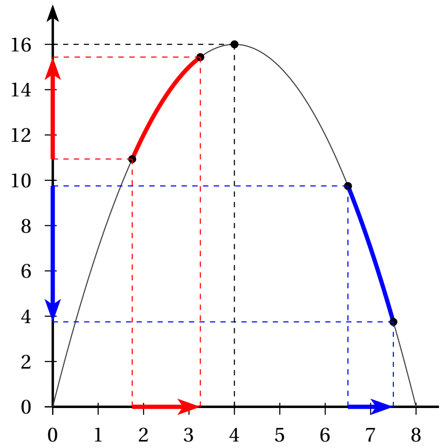
a. Sens de variations d'une fonction

EXEMPLE

- Enclos

  Lorsque x décrit l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f(x)$ augmente de la valeur 0 à la valeur 16.
  On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

  Lorsque x décrit l'intervalle $[4\,;\,8]$, $f(x)$ diminue de la valeur 16 à la valeur 0.
  On dit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[4\,;\,8]$.



DÉFINITION

Étudier le *sens de variations* d'une fonction consiste à découper son ensemble de définition en une succession d'intervalles les plus larges possibles sur lesquels la fonction est ou bien croissante, ou bien décroissante.

b. Tableau de variations d'une fonction

MÉTHODE

Un *tableau de variations* permet de résumer le sens de variations de la fonction.

EXEMPLE

- Enclos

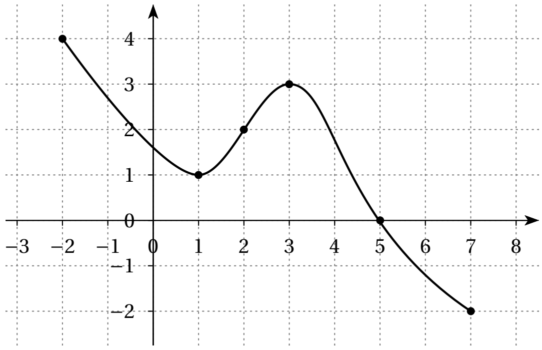
  Le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	0		4		8
$f(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

c. Tableau de variations d'une fonction de courbe donnée

EXERCICE

Dresser le tableau de variations de la fonction f dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



SOLUTION

Le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	-2		1		3		7
$f(x)$	4	↘	1	↗	3	↘	-2

d. Courbe d'une fonction compatible avec ses variations

EXERCICE

Tracer une courbe compatible avec le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$ et donné ci-dessous.

x	-2		1		3		5
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1	↗	1

SOLUTION

Une courbe compatible avec le tableau de variations de la fonction f est donnée par :