PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

PROBLÈME

Un joueur joue contre la banque au jeu du PILE ou FACE, en misant toujours sur FACE.

Il adopte la stratégie suivante :

- Il mise 1 € au premier coup, et si PILE sort, double la mise au coup suivant, tant que FACE ne sort pas.
- Si FACE sort, il récupère sa mise augmentée d'une somme équivalente à cette mise.

Le joueur dispose d'une fortune limitée, qui lui permet de perdre au maximum n coups consécutifs et, si PILE sort n fois de suite, le joueur ne peut plus miser et arrête le jeu. La fortune de la banque, elle, n'est pas limitée.

Une partie consiste pour le joueur à miser, si sa fortune le lui permet, jusqu'à ce que FACE sorte.

Il s'agit de déterminer la probabilité pour le joueur de gagner une partie, son gain algébrique, et d'analyser l'intérêt pour le joueur de jouer à ce jeu.

On suppose que la fortune du joueur lui permet de miser jusqu'à n fois. Si FACE sort avant le $n^{\text{ième}}$ coup, le joueur ne mise rien les coups suivants.

On note :

- A_n l'événement : « Le joueur obtient n PILE ».
- G l'événement : « Le joueur gagne la partie ».
- X la variable aléatoire égale au rang du premier FACE, en convenant que ce rang vaut 0 si FACE ne sort pas.
- Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

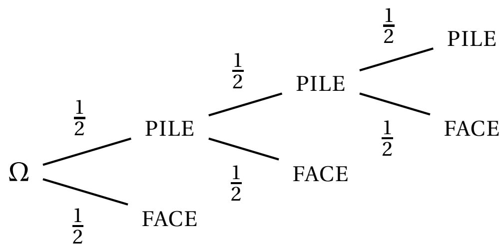
EXEMPLE

On suppose que le joueur dispose d'une fortune de 10 €. Il peut donc miser jusqu'à 3 fois : 1 €, 2 € et 4 €, soit 7 € en tout.

L'arbre ci-contre illustre la partie :

Par le principe multiplicatif, on a : $p(\mathrm{A}_3) = \dfrac{1}{8}$.

Par conséquent : $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{8}$.



La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,\}$.

On peut observer que la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\{\,-7\,;\,+1\,\}$.

Rang du premier FACE : k	0	1	2	3
Probabilité : $p(X = k)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$

Gain algébrique en euros : g	-7	$+1$
Probabilité : $p(Y = g)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{7}{8}$

On suppose que le joueur dispose d'une fortune de 1 000 €.

PARTIE A. MODÉLISATION MATHÉMATIQUES

1. Justifier qu'avec une fortune de 1 000 €, on a $n = 9$.
2. Calculer $p(\text{A}_9)$ puis $p(\text{G})$.
3. Dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

Rang du premier FACE : k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité : $p(X = k)$										

4. **a.** Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\{-511\ ;\ +1\}$.
   b. Dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Gain algébrique en euros : g	-511	$+1$
Probabilité : $p(Y = g)$		

   c. Montrer que $E(Y) = 0$.

PARTIE B. SIMULATION DE 1 000 PARTIES EN 9 COUPS AU PLUS SUR UN TABLEUR

On convient de noter **1** la sortie de FACE et **0** la sortie de PILE.

1. Ouvrir une feuille de classeur et suivre les instructions qui suivent, permettant de simuler 1 000 parties en 9 coups au plus :
   - Dans la cellule **A1**, saisir la formule :

     = ALEA.ENTRE.BORNES(0 ; 1)

   - Dans la cellule **B1**, saisir la formule :

     = SI(OU(A1=1 ; A1="") ; "" ; ALEA.ENTRE.BORNES(0 ; 1))

   - Glisser la formule précédente vers la droite jusqu'à la cellule **I1**.
   - Dans la cellule **J1**, saisir la formule :

     = SI(SOMME(A1 : I1)=0 ; "PERDU" ; "GAGNÉ")

   - Glisser la plage **A1 : J1** vers le bas jusqu'à la ligne **1 000**.
   - Dans la cellule **K1**, saisir la formule :

     = NB.SI(J1 : J1000 ; "PERDU")

2. En appuyant sur la touche **F9** du clavier, on recommence une simulation de 1 000 parties en 9 coups au plus. On s'aperçoit dans la cellule **K1** qu'il est possible de perdre plusieurs parties.

PARTIE C. LE PARADOXE

1. Calculer le gain algébrique sur un ensemble de 1 000 parties dont 4 seraient perdues.
2. Où réside le paradoxe ?