

FONCTION ET ÉPIDÉMIE

PROBLÈME

Un virus affecte la population d'une ville. On s'intéresse à la progression de son épidémie en fonction du temps.

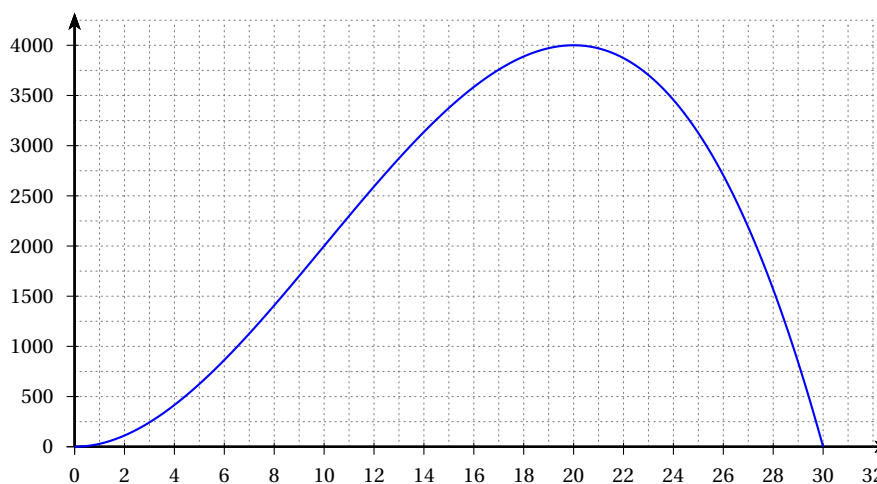
On suppose que cette progression est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 30x^2$$

où $f(x)$ représente le nombre d'individus infectés par le virus au bout de x jours.

On note $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 30]$.

La courbe ci-dessous représente la fonction f sur sur l'intervalle $[0 ; 30]$.



1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 30]$, on a : $f'(x) = -3x(x - 20)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 30]$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 30]$.
4. En déduire le pic de l'épidémie, c'est à dire le nombre maximal d'individus infectés par le virus.
5. Au bout de combien de jours ce pic est-il atteint?
6. Avec la précision permise par le graphique, déterminer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'individus infectés par le virus est supérieur ou égal à 25 % du pic de l'épidémie.
7. Interpréter l'évolution des valeurs suivantes dans le contexte de l'expansion de l'épidémie :

$$f'(12) = 288$$

$$f'(18) = 108$$

$$f'(20) = 0$$

8. Quel jour le taux d'accroissement du nombre d'individus infectés par le virus est-il maximal?