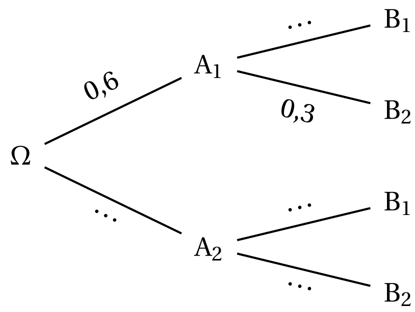
VARIABLES ALÉATOIRES

EXERCICE 1

On a représenté par l'arbre pondéré ci-contre une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.

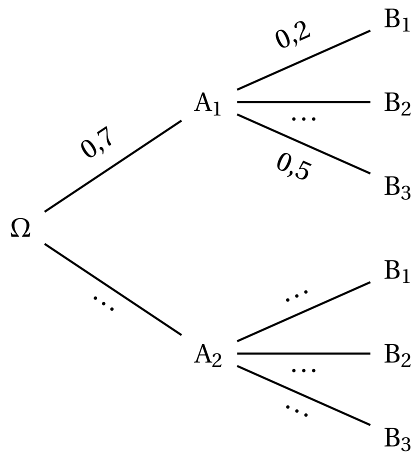
1. Quelles sont les issues de la première épreuve ?
2. Quelles sont les issues de la deuxième épreuve ?
3. Donner les probabilités manquantes sur l'arbre.



EXERCICE 2

On a représenté par l'arbre pondéré ci-contre une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.

1. Quelles sont les issues de la première épreuve ?
2. Quelles sont les issues de la deuxième épreuve ?
3. Donner les probabilités manquantes sur l'arbre.
4. Vérifier que la probabilité de l'issue $A_1 \cap B_1$ est égale à 0,14.
5. Déterminer la probabilité de chacune des issues $A_2 \cap B_1$ et $A_2 \cap B_3$.



EXERCICE 3

Au goûter du centre de vacances, Céline prend au hasard un gâteau fourré puis une brique de jus de fruit.

Dans un premier sac, il y a 12 gâteaux à l'orange et 36 gâteaux à la fraise.

Dans un second sac, il y a 24 briques de jus de pomme et 24 briques de jus de raisin.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant cette situation pour donner l'ensemble Ω des issues.

   On notera O le choix d'un gâteau à l'orange, F le choix d'un gâteau à la fraise, P le choix d'une brique de jus de pomme et R le choix d'une brique de jus de raisin.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Céline a pris un gâteau à l'orange et un jus de pomme ».

EXERCICE 4

On joue avec un dé à six faces, bien équilibré, et un jeu de 32 cartes, non truqué.

Le résultat du dé n'interfère pas sur le résultat du jeu de cartes.

On lance le dé et on tire une carte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face multiple de 3 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?
3. Calculer la probabilité d'obtenir une face paire et un cœur.

EXERCICE 5

Pour ouvrir la porte d'entrée d'un immeuble, un code secret de quatre chiffres doit être tapé sur un clavier à neuf chiffres.

Le code peut contenir plusieurs fois le même chiffre.

1. Justifier que le nombre de codes possibles est 6 561.
2. Un code est programmé. On tape un code au hasard. Quelle est la probabilité qu'on tape le bon code ?

EXERCICE 6

Pour réaliser un travail en arts plastiques, Zitoun dispose d'une boîte d'objets à peindre où se trouvent 48 % de cubes et 52 % de sphères, et de 5 tubes de peinture : 3 tubes de vert, 1 tube de bleu et 1 tube de jaune.

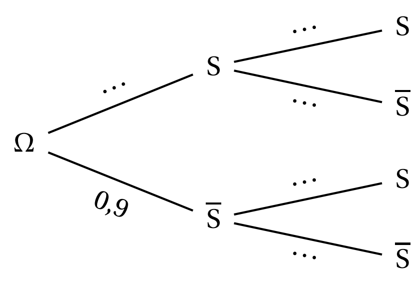
Il prend au hasard un objet et un tube de peinture.

1. Construire un arbre illustrant cette situation pour donner l'ensemble Ω des issues.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Zitoun prend un cube et un tube de peinture verte ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « Zitoun prend une sphère et un tube de peinture jaune ».

EXERCICE 7

On a représenté par l'arbre pondéré ci-contre la répétition de deux épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

1. Recopier et compléter l'arbre.
2. Quelle est la probabilité de l'issue SS ?
3. Quelle est la probabilité de l'issue $S\overline{S}$?



EXERCICE 8

Un sac contient 15 cubes bleus et 20 cubes jaunes.

On tire successivement quatre cubes du sac, sans remettre le cube tiré dans le sac.

Expliquer pourquoi les épreuves aléatoires ne sont pas identiques.

EXERCICE 9

Une boîte opaque contient 20 jetons : 3 rouges, 7 jaunes et 10 bleus.

On choisit au hasard un jeton et on appelle succès l'événement S : « Obtenir un jeton rouge ».

1. On ne remet pas le jeton tiré dans la boîte, on tire à nouveau un jeton. Les deux épreuves sont-elles indépendantes ? Justifier.
2. On remet le jeton tiré dans la boîte, on tire à nouveau un jeton. Représenter ce double tirage par un arbre pondéré et calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès.

EXERCICE 10

On administre un vaccin à des enfants.

La proportion des enfants présentant une réaction forte à ce vaccin est égale à 30 %.

On examine deux enfants. On assimile cet examen à deux tirages identiques et indépendants.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant cette situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Les deux enfants présentent une réaction forte au vaccin ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « Un seul des deux enfants présente une réaction forte au vaccin ».

EXERCICE 11

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires.

On tire deux boules de l'urne au hasard successivement et avec remise.

1. Construire un arbre de probabilités modélisant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Les deux boules tirées sont noires ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « Une seule des deux boules tirées est noire ».

EXERCICE 12

Un club de sport a réalisé une enquête de satisfaction de ses clients. Il ressort que la probabilité qu'un client de ce club soit satisfait est égale à 0,9.

A la sortie de ce club, on interroge au hasard, et successivement, quatre adhérents.

1. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité que les quatre clients interrogés soient satisfaits.
3. Calculer la probabilité qu'au moins un client soit satisfait.

EXERCICE 13

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Si l'on obtient un 7, un 8, un 9 ou un 10, on perd 3 euros. Si l'on obtient un Valet, une Dame ou un Roi, on gagne 2 euros. Si l'on obtient un As, on gagne 5 euros.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

EXERCICE 14

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire l'événement $\{X = 2\}$.
3. Décrire l'événement $\{X = 3\}$.

EXERCICE 15

On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6.

On gagne 5 euros si l'on obtient la face numérotée « 3 » et on gagne 1 euro dans les autres cas.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

1. Donner $p(X = 1)$.
2. Donner $p(X = 5)$.

EXERCICE 16

On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de voitures neuves vendues par un concessionnaire.

Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i	0	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	0,45	0,3	0,15	p

1. Donner la probabilité $p(X = 1)$.
2. Calculer $p(X \leqslant 1)$.
3. Calculer le réel p.

EXERCICE 17

Un sac contient un jeton marqué « 2 » et un jeton marqué « 3 ».

On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage.

On définit alors la variable aléatoire X qui, à chaque partie, associe le produit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
3. **a.** Décrire l'événement $\{X = 9\}$.
   b. Calculer sa probabilité.
4. **a.** Décrire l'événement $\{X < 8\}$.
   b. Calculer sa probabilité.

EXERCICE 18

Une urne contient deux jetons noirs et huit jetons blancs.

On tire au hasard successivement et avec remises deux jetons de l'urne.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant la situation.
2. Chaque jeton blanc rapporte 2 euros et chaque jeton noir fait perdre 1 euro.

   On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme algébrique obtenue à la fin des deux tirages.

   a. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ et calculer sa probabilité.

   b. Décrire l'événement $\{X < 4\}$ et calculer sa probabilité.

EXERCICE 19

1. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i	2	5
Probabilité $p(X = x_i)$	0,4	0,6

   Vérifier que $E(X) = 3{,}8$.

2. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$. Donner son espérance.

EXERCICE 20

Un domino est composé de deux cases portant chacune un nombre de points entre 0 et 6. Un même nombre peut figurer dans les deux cases.

Un jeu de dominos en comporte 28.

On pioche un domino au hasard et on considère la variable aléatoire X égale à la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du domino.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. Décrire l'événement $\{X = 3\}$ et en déduire $p(X = 3)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

EXERCICE 21

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs.

Parmi les 120 billets distribués :

- 3 donnent droit à quatre places gratuites;
- 6 donnent droit à deux places gratuites;
- 42 donnent droit à une place gratuite;
- les autres billets ne donnent droit à rien.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe le nombre de places gratuites gagnées.

Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 22

Un adolescent télécharge au plus cinq applications payantes sur son smartphone par mois.

On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre d'applications achetées par l'adolescent.

La loi de N est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeur k	0	1	2	3	4	5
Probabilité $p(N = k)$	0,13	0,2	p	0,07	0,3	0,1

1. Calculer la probabilité manquante p.
2. Calculer la probabilité qu'il achète au moins trois applications au cours du mois.
3. Calculer la probabilité qu'il achète au plus quatre applications au cours du mois.

EXERCICE 23

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de connexions d'un adolescent à l'Espace numérique de travail de son Lycée (ENT).

Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i	0	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	0,1	0,2	0,5	0,2

1. Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Interpréter le résultat.

EXERCICE 24

On lance une pièce de monnaie truquée de telle manière que la probabilité de sortie de la face « PILE » est 0,4.

Le joueur gagne 3 euros si la face visible est « PILE », sinon il perd 2 euros.

On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

1. Etablir la loi de probabilité de G.
2. Calculer l'espérance de G.
3. Le jeu est-il équitable ? Justifier.

EXERCICE 25

On considère la variable aléatoire G qui, à chaque partie d'un jeu, associe le gain du joueur, positif si celui-ci gagne de l'argent, négatif sinon.

Elle prend les valeurs -5 ; 3 et a, avec a nombre entier.

On a : $p(G = -5) = 0{,}6$ et $p(G = a) = 0{,}1$.

1. Calculer la valeur de $p(G = 3)$.
2. Exprimer l'espérance de G en fonction de a.
3. Déterminer la valeur de a à partir de laquelle le jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 26

Un restaurant propose à sa carte deux types de desserts :

- un assortiment de macarons choisis par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin choisie par 30 % des clients.

On sait que 20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

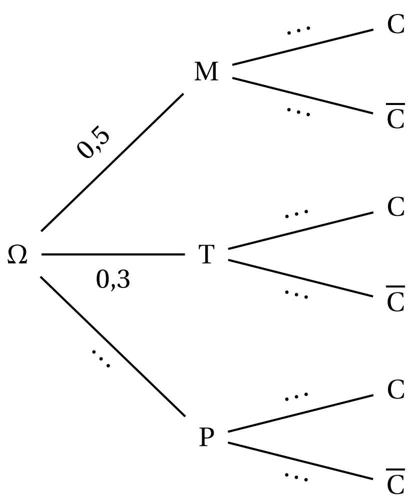
Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

- M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'événement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'événement : « Le client prend un café ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. **a.** Calculer la probabilité que le client prenne un café et un assortiment de macarons.
   b. Montrer que la probabilité que le client prenne un café est égale à 0,76.

3. Un assortiment de macarons est vendu 6 euros, une part de tarte tatin est vendue 6 euros et un café est vendu 2 euros.

   Chaque client prend un plat, et un seul, au prix unique de 18 euros et ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

   Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale dépensée par le client.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.