FONCTIONS

EXERCICE 1

On donne la fonction $f : x \mapsto 2x - 3 + \dfrac{1}{x}$.

Calculer à la main les images de -1 ; 2 et 10.

EXERCICE 2

On donne la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1+t^2}{t}$, où $t \neq 0$.

Calculer à la main $g(2)$; $g(0{,}1)$ et $g(-0{,}1)$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 10x^2$.

Calculer à la main $f(2)$; $f(-3)$ et $f(10)$.

EXERCICE 4

Soit $f : x \mapsto x^2$ et x_1 et x_2 deux réels distincts.

1. Exprimer le taux de variation entre x_1 et x_2.
2. Factoriser le numérateur.
3. Simplifier le quotient.
4. Préciser le sens de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
5. Même question sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.

EXERCICE 5

Soit la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

1. Exprimer le taux de variation entre x_1 et x_2.
2. Conclure sur la monotonie de la fonction affine sur $\mathbb{R}$.

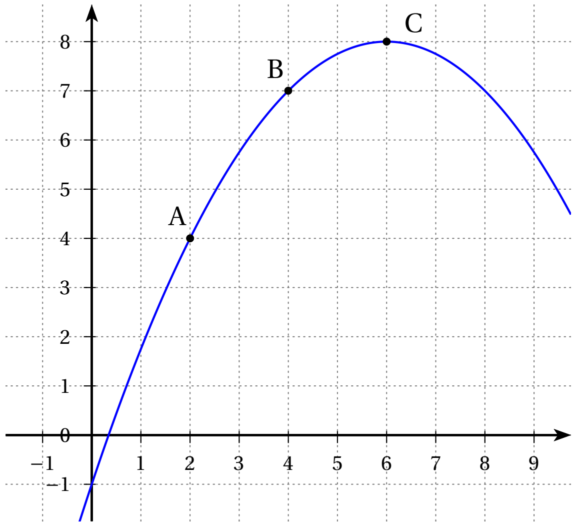
EXERCICE 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et deux réels x_1 et x_2 distincts non nuls.

1. Exprimer le taux de variation entre x_1 et x_2.
2. Simplifier au mieux le quotient.
3. Étudier son signe suivant le signe de x_1 et x_2.
4. En déduire la monotonie de la fonction inverse, en précisant l'intervalle.

EXERCICE 7

On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.



1. **a.** Lire la pente des sécantes (AB) et (BC).

   b. Déterminer leur équation réduite.

2. La courbe $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$y = \frac{-x^2}{4} + 3x - 1$$

3. Calculer le taux de variation de f entre 0 et 2.
4. Calculer le taux de variation de f entre 3,9 et 4.

EXERCICE 8

Dans une entreprise, les dirigeants désirent conserver une masse salariale MS constante.

On note W le salaire moyen annuel dans l'entreprise et L le nombre de salariés.

1. **a.** Écrire l'égalité donnant la masse salariale en fonction de L et W.

   b. Justifier que, si le nombre de salariés diminue, alors le salaire moyen augmente, à masse salariale constante.

   c. Comment varient ces deux grandeurs W et L ?

2. Dans une entreprise, la masse salariale annuelle est de 24 millions d'euros.

   Recopier et compléter le tableau ci-dessous, arrondir à l'unité.

W en euros		65 000		38 000
L	400		500	

EXERCICE 9

Pour chaque fonction, indiquer le sommet et l'axe de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}$, puis les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, s'ils existent.

1. $x \longmapsto 2x^2 - 10$
2. $x \longmapsto -x^2 - 4$
3. $x \longmapsto \frac{1}{4}x^2 - 1$
4. $x \longmapsto x^2 - 121$

EXERCICE 10

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^2 - 4x$.

1. Factoriser $x^2 - 4x$.
2. En déduire les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
3. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}$.
4. Préciser l'allure de $\mathscr{C}$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(x+7)$.

1. Donner le nom de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation y = f(x) et son allure.
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et en donner une interprétation graphique.
3. Déterminer les coordonnées du sommet S de la courbe $\mathscr{C}$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ dans un tableau de signes, ou à l'aide de l'allure de la parabole et des intersections avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 12

Étudier la fonction $f : x \mapsto -(x+2)(2x+1)$ en suivant les étapes vues à l'**exercice 11**.

EXERCICE 13

Étudier la fonction $g : t \mapsto 0{,}5(t+10)(2t-8)$ en suivant les étapes vues à l'**exercice 11**.

EXERCICE 14

L'énergie cinétique, en joules, est donnée par $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2} m \times v^2$ où m est la masse en kg et v la vitesse en m/s.

1. **a.** Expliquer pourquoi, à vitesse constante, l'énergie cinétique est proportionnelle à la masse. Est-elle proportionnelle à la vitesse ?
   b. A masse m constante, on augmente la vitesse v de une unité (1 m/s). Déterminer le taux de variation de l'énergie cinétique.
2. **a.** Déterminer la vitesse, en mètre par seconde, pour une masse de 80 kg et une énergie cinétique de 100 joules.
   b. Déterminer la masse d'un objet lancé à une vitesse de 3 m/s et ayant une énergie cinétique de 207 joules.

EXERCICE 15

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son sens de variations.

1. $x \mapsto 2x^3$ 2. $x \mapsto -0{,}1x^3$ 3. $x \mapsto 0{,}5x^3 - 4$ 4. $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + 9$

EXERCICE 16

L'offre et la demande de poulets « label » sur un marché en gros sont modélisées par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 5 \text{ et } g(x) = -0{,}05x^3 + 30$$

pour un prix x variant de 3 à 6 €/kg.

Les quantités échangées sur ce marché, $f(x)$ et $g(x)$, sont en tonnes.

1. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g sur l'intervalle $[3 ; 6]$.
2. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Arrondir le résultat à 0,01 près.
   b. En donner une signification concrète.
   c. Calculer la quantité de volailles échangées au prix d'équilibre, à 100 kg près.
   d. Calculer le chiffre d'affaires engendré par la vente de ces volailles au prix du marché.

EXERCICE 17

Le volume d'une sphère de rayon R est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$.

1. **a.** Calculer le volume pour un rayon de 10 cm.
   b. Si le rayon augmente de 20 %, calculer le taux d'évolution du volume, l'exprimer en pourcentage.
2. **a.** Résoudre l'équation $(1+t)^3 = 1{,}728$.
   b. Donner une signification à la solution de cette équation, liée au volume de la sphère.
3. Déterminer le taux d'évolution du rayon qui engendre un doublement du volume de la sphère.

   On montrera que cela revient à résoudre l'équation : $(1+t)^3 = 2$.

EXERCICE 18

On considère le polynôme de degré 3 : $P(x) = (x+1)(x-5)(x-2)$.

1. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. Placer les racines de $P(x)$ sur un axe.
3. Calculer $P(x)$ pour une valeur de x différente des racines et donner son signe.
4. Appliquer l'alternance des signes + et − pour obtenir le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 19

1. Étudier le signe de $P(x) = 2x(x+5)(3x-1)$ à l'aide d'un tableau de signes.

   Vérifier l'alternance des + et − pour le signe de $P(x)$
2. Appliquer cette alternance pour obtenir le signe de $Q(x) = (-2x+1)(x+2)(x-4)$.
3. Même question pour obtenir le signe de $R(x) = (3x-1)(-x+5)(2-x)$.

EXERCICE 20

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Sur l'écran d'une calculatrice, visualiser la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.
2. Factoriser $P(x)$ au maximum.

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$$

1. **a.** Visualiser le courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'écran d'une calculatrice.
   b. En déduire les racines de f(x) et sa factorisation.
2. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = 2x - 8$.
   b. Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équation $y = 2x - 8$.
   Interpréter graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2x - 8$.

EXERCICE 22

En raison notamment de l'inflation, les tranches des impôts sont réactualisées chaque année.
On a donc arrondi les bornes à 1 000 € près, ce qui ne change rien au principe de calcul.
Les taux donnés dans le tableau ci-dessous sont ceux applicables à un célibataire.

Tranche	Palier (en €)	Taux
$1^{\text{ère}}$	0	0 %
$2^{\text{ème}}$	10 000	14 %
$3^{\text{ème}}$	26 000	26 %
$4^{\text{ème}}$	74 000	41 %
$5^{\text{ème}}$	156 000	45 %

1. Ben a un revenu imposable (RI) de 17 000 € annuels. Déterminer sa tranche d'imposition et le montant de son impôt.
2. Adam a un RI exactement de 26 000 €.
   - **a.** Est-il dans la $2^{\text{ème}}$ ou la $3^{\text{ème}}$ tranche ? Expliquer.
   - **b.** Calculer le montant de son impôt.
   - **c.** On lui propose 1 000 € de plus. Il refuse, argumentant que « tout va partir en impôts ». Prouver qu'il a tort.
3. On note x le revenu imposable en k€ et $R(x)$ le montant de l'impôt correspondant.
   - **a.** Pour chaque tranche de revenu, déterminer la fonction R.
     Par exemple, pour $x \in [0\,;\,10[$, on a $R(x) = 0$.
   - **b.** Justifier que, pour tout $x > 156$, on a : $R(x) = 0{,}45(x - 156) + 50{,}26$.

EXERCICE 23

La fonction de coût total d'un liquide est donnée par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10$$

pour toute quantité x de 0 à 5 milliers de litres.
Le coût total est exprimé en milliers d'euros.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Le chiffre d'affaires engendré par la vente de x milliers de litres est donné par :

$$R(x) = 18x + 10$$

   - **a.** Résoudre l'équation $f(x) = 18x + 10$.
   - **b.** En déduire la plage de bénéfice, c'est-à-dire l'intervalle des quantités produites et vendues, permettant un bénéfice positif.
3. **a.** Pour toute quantité x, exprimer en fonction de x le taux de variation du coût engendré par une augmentation de 1 L de la production.
   - **b.** Justifier que ce taux de variation s'exprime en milliers d'euros par milliers de litres, ou en euros par litre.
   - **c.** Calculer ce taux lorsque l'on a produit 2 000 L.

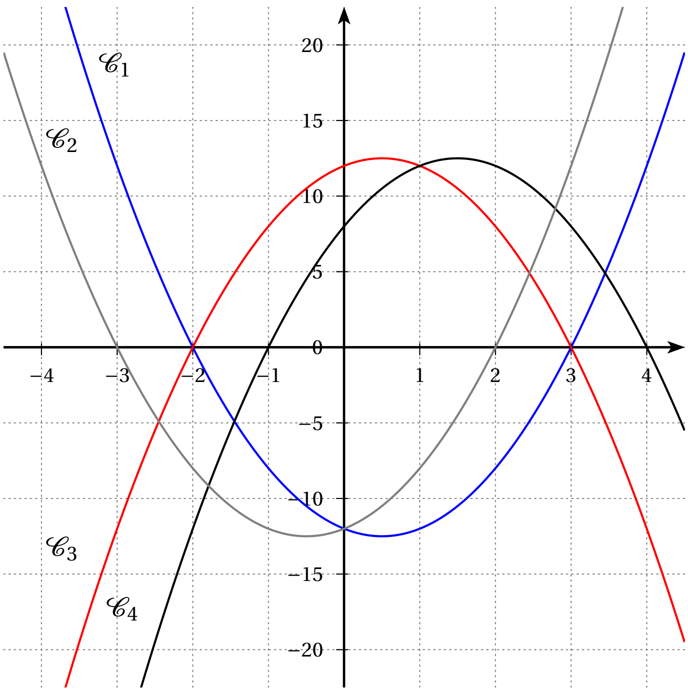
EXERCICE 24

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 12$$

1. Montrer que 3 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
2. Montrer que -2 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.
5. Parmi les quatre courbes suivantes, indiquer celle de la fonction f.

   Justifier la réponse.



EXERCICE 25

Un plongeur effectue un saut depuis un falaise située en bord de mer.

L'altitude du pied du plongeur, en mètre, en fonction du temps écoulé depuis le déclenchement du saut t, en seconde, est modélisée par la fonction f définie par :

$$f(t) = -0{,}5t^2 + t + 4$$

1. A quelle altitude se trouve la falaise ? Justifier la réponse.
2. Calculer $f(1)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Montrer que : $f(t) = -0{,}5(t+2)(t-4)$.
4. Dresser le tableau de signes la fonction f.
5. Au bout de combien de secondes le pied du plongeur atteint-il la mer ?

   Justifier la réponse.
6. Question subsidiaire : quelle est la hauteur maximale atteinte par le pied du plongeur ?

EXERCICE 26

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

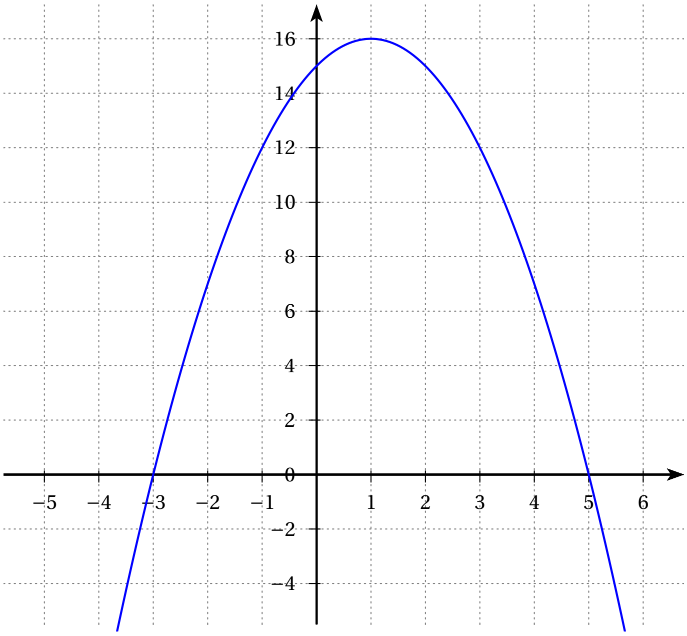
1. Montrer que le nombre -1 est une racine de la fonction f.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) = 3(x+1)(x-3)$.
3. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
4. Faire un schéma à main levée de la courbe représentative de la fonction f.
5. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.
6. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
7. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction f est atteint en 1.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 27

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 6]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 15$$

La fonction f est représentée sur le graphique ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 6]$.
3. Déterminer graphiquement les coordonnées du sommet S de la courbe de f.
4. En déduire une équation de l'axe de symétrie de la courbe de f.
5. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 6]$.
7. Résoudre l'inéquation : $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$.

EXERCICE 28

Un restaurateur conçoit entre 10 et 80 repas.

Le coût de conception de x repas, en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[10\,;\,80]$ par :

$$C(x) = 2x^2 - 160x + 3\,200$$

1. Calculer le coût de conception de 50 repas.
2. On suppose qu'un repas est facturé 40 euros.

   Montrer que le bénéfice $B(x)$, en euros, réalisé par la vente de x repas, est donné par :

$$B(x) = -2x^2 + 200x - 3\,200$$

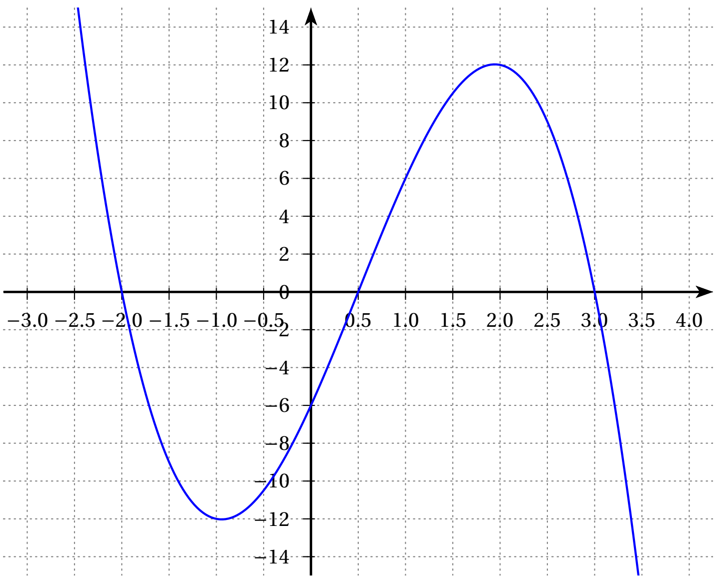
3. Montrer que pour tout $x \in [10\,;\,80]$, on a : $B(x) = -2(x-20)(x-80)$.
4. Déterminer le tableau de signes de $B(x)$ sur l'intervalle $[10\,;\,80]$.
5. Combien de repas le restaurateur doit-il concevoir et vendre pour réaliser un bénéfice ?
6. Déterminer le nombre de repas à concevoir et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.

EXERCICE 29

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2{,}5\,;\,3{,}5]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$$

La fonction f est représentée sur le graphique ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement $f(1{,}5)$.
2. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -6$.
3. Calculer $f(1)$.
4. Vérifier que, pour tout réel $x \in [-2{,}5\,;\,3{,}5]$, on a : $f(x) = (1-2x)(x^2 - x - 6)$.
5. On admet que $f(x) = (1-2x)(x-3)(x+2)$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
6. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[-2{,}5\,;\,3{,}5]$.