

DÉRIVATION

EXERCICE 1

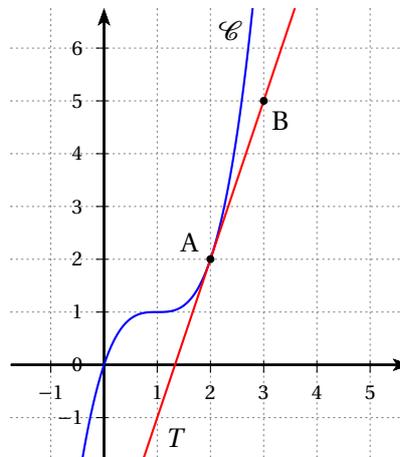
- Placer dans un repère les trois points A $(-4 ; 2)$, B $(0 ; 5)$ et C $(2 ; -2)$.
- Calculer le coefficient directeur des droites (AB), (AC) et (BC).

EXERCICE 2

Sur le graphique ci-contre, la courbe \mathcal{C} est la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

La droite T est une tangente à la courbe \mathcal{C} .

- Préciser l'abscisse du point où T est tangente à la courbe \mathcal{C} .
- Par lecture graphique, déterminer le coefficient directeur de la droite T .
 - Quel nombre dérivé peut-on en déduire? Quelle est sa valeur?

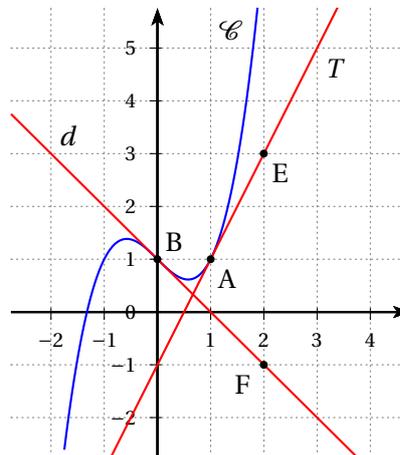


EXERCICE 3

Sur le graphique ci-contre, la courbe \mathcal{C} est la courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

Les droites T et d sont tangentes à la courbe \mathcal{C} .

- Quel est le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse 1?
 - Quelle droite est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1?
- Justifier que le coefficient directeur de la droite T est égal à 2.
 - Quel nombre dérivé peut-on en déduire? Quelle est sa valeur?
- Calculer $f'(0)$.



EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

- Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$ pour un réel h non nul.
Rappel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 - En déduire que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égal à $4+h$.
- Montrer que la fonction f est dérivable en 1 et donner la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

EXERCICE 5

Dans chaque cas, on considère l'expression $f(x)$ d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

Calculer alors l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée f' .

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = 7$. | 2. $f(x) = 3x$. | 3. $f(x) = -7x + 1$. |
| 4. $f(x) = -x$. | 5. $f(x) = 5x + 1$. | 6. $f(x) = 3 - 2x$. |
| 7. $f(x) = 17x - 3$. | 8. $f(x) = x + 1$. | 9. $f(x) = 5 - x$. |
| 10. $f(x) = x^2 + x$. | 11. $f(x) = 9x^2$. | 12. $f(x) = -4x^2$. |
| 13. $f(x) = x^3 - 3$. | 14. $f(x) = 1 + x^3$. | 15. $f(x) = x^3 - x$. |
| 16. $f(x) = x^3 - x^2$. | 17. $f(x) = 2x^3$. | 18. $f(x) = -5x^3$. |
| 19. $f(x) = 5x^2 - x$. | 20. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. | 21. $f(x) = -1 + 2x + x^2$. |
| 22. $f(x) = x^3 + 7x + 1$. | 23. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$. | 24. $f(x) = 5 - 2x^3$. |

EXERCICE 6

Un tonneau de vin de 100 litres se vide en 10 minutes.

A l'instant t , exprimé en minutes, la quantité de vin déjà vidée est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par l'expression :

$$f(t) = 20t - t^2$$

Le débit à l'instant t , exprimé en litres par minutes, est $f'(t)$.

- Calculer $f'(t)$.
- En déduire le débit de vin à l'instant $t = 5$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 1$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative et T la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 2.

- Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = 10x + 3$.
- Calculer le nombre dérivé de f en 2. En déduire le coefficient directeur de la droite T .
- Calculer $f(2)$. En déduire les coordonnées du point A.
- Parmi les équations ci-dessous, laquelle est une équation de T ?
 - $y = 23x + 27$
 - $y = 23x - 19$
 - $y = 23x$

EXERCICE 8

Une fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 7]$ et son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	1	3	7
$f(x)$	-2	10	0

Quel est le signe de la dérivée de f sur l'intervalle $[1 ; 3]$? sur l'intervalle $[3 ; 7]$?

EXERCICE 9

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$	15	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

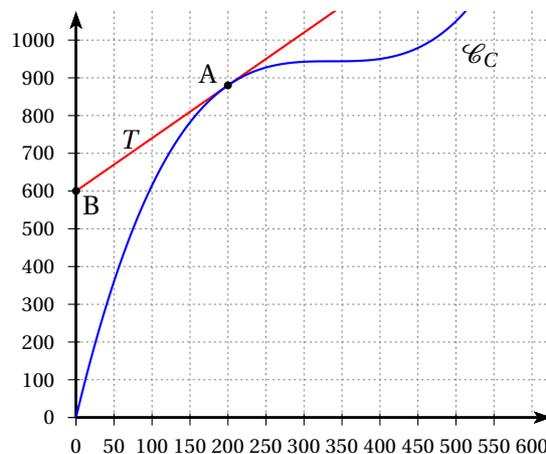
Quel est le sens de variations de f sur l'intervalle $]-\infty ; 15]$? sur l'intervalle $[15 ; +\infty[$?

EXERCICE 10

Une entreprise fabrique des articles de sport.

Le coût total de fabrication, en euros, est modélisé par une fonction C dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

La tangente T à cette courbe au point A (200 ; 880) passe par le point B (0 ; 600).



On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 201^{ème} article.

Une valeur approchée de ce coût est donnée par le nombre dérivé de la fonction C en 200.

Déterminer graphiquement une valeur approchée du coût marginal au rang 200.

EXERCICE 11

La courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f passe par les points A (0 ; -1), B (1 ; -4) et C (2 ; -1).

La fonction f est dérivable en 0, en 1 et en 2.

On sait que $f'(0) = -6$, $f'(1) = 0$ et $f'(2) = 6$.

Déterminer l'équation réduite des tangentes à \mathcal{C}_f aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

EXERCICE 12

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

On sait que les points A (-2 ; -1), B (-1 ; -2) et C (0 ; -1) appartiennent à \mathcal{C}_f .

1. Placer les points A, B et C dans un repère.

2. On sait aussi que f est dérivable en -2, en -1 et en 0.

On donne les nombres dérivés suivants : $f'(-2) = -3$, $f'(-1) = 0$ et $f'(0) = 2$.

Tracer les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f en A, en B et en C.

3. Tracer une courbe pouvant représenter f .

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + 6x - 10$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
3. Construire le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
4. En déduire que f admet un extremum sur \mathbb{R} . Préciser sa nature et en quelle valeur de x il est atteint.

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 6]$ par :

$$f(x) = 5(x - 3)^2 + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^3 + 3,5x^2 - 3x + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (2x + 3)(3x - 1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
4. Construire le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5 ; 7]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 20$$

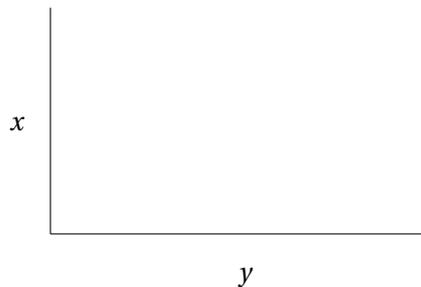
1. Démontrer que $f'(x) = 3(x + 3)(x - 5)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5 ; 7]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-5 ; 7]$.

EXERCICE 18

Monsieur et Madame Dupont souhaitent créer un potager de forme rectangulaire, le long du mur de leur maison.

Pour cela, ils disposent de 15 m de grillage pour clôturer les trois côtés, le 4^{ème} côté étant le mur. Le potager devra avoir la plus grande surface possible.

On pose x et y les dimensions, en mètre, du potager, comme indiqué sur le dessin :



1. A quels intervalles appartiennent x et y ?
2. Démontrer que : $y = 15 - 2x$.
3. En déduire que la surface du potager est égale à l'expression : $-2x^2 + 15x$.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 15x$$

- a. Calculer $f'(x)$.
- b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$.
- c. En déduire que la fonction f admet un maximum.
Quel est ce maximum? En quelle valeur est-il atteint?
- d. Interpréter les résultats de la question 4.c. dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 19

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire, en euros, réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes.

La fonction B est définie sur l'intervalle $[0 ; 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. Calculer $B'(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 45]$, $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 45]$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction B .
5. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal? A combien s'élève-t-il alors?

EXERCICE 20

La patronne d'un restaurant dispose d'un menu du soir à 15 €. En moyenne, elle sert 80 clients chaque soir.

Elle souhaite modifier le prix de son menu afin d'optimiser son bénéfice.

Une étude de son restaurant lui apporte les résultats suivants :

- Le coût de réalisation d'un menu est de 10 €.
- Une augmentation du prix entraîne une baisse du nombre moyen de clients chaque soir. Pour une augmentation de 1 €, cette baisse est estimée à 5 clients.

Pour une augmentation de x euros du prix du menu, on note $B(x)$ le bénéfice moyen réalisé en euro.

Par exemple, si le prix du menu passe à 16 €, alors $x = 1$ et $B(1) = 450$.

1. Pour une augmentation de x euros, donner en fonction de x :
 - a. Le prix du menu.
 - b. Le nombre de clients.
 - c. Le chiffre d'affaires par soir.
2. En déduire que $B(x) = -5x^2 + 55x + 400$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
4. Lorsque le bénéfice est maximal :
 - a. Quelle est la valeur de x ?
 - b. Donner alors le prix du menu.
 - c. Quel est le bénéfice?
 - d. Quel est le nombre moyen de clients par soir?

EXERCICE 21

Une entreprise produit des bouteilles d'eau issue des glaciers. L'eau arrive sous forme de cubes de glace de 1 m de côté. Ces cubes sont mis à fondre et l'eau ainsi produite se déverse dans une cuve qui contient déjà 100 L d'eau.

Le volume d'eau dans la cuve en fonction du temps est donné par la fonction v définie par :

$$v(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$$

où x est le temps en heure, et $v(x)$ le volume d'eau en litre.

Maxime et Paula, deux employés, veulent connaître le débit, en $L.h^{-1}$, au bout de deux heures de fonte.

1. Maxime décide d'approcher ce débit en calculant le débit moyen entre 2 heures et 4 heures.
 - a. Calculer $v(2)$, le volume présent dans la cuve au bout de 2 heures, puis $v(4)$.
 - b. En déduire la quantité d'eau produite entre 2 heures et 4 heures.
 - c. Calculer le débit moyen entre 2 heures et 4 heures.
2. Paula rappelle que l'on peut obtenir le débit instantané à n'importe quel moment et de manière exacte avec la fonction dérivée de v .
 - a. Calculer $v'(x)$.
 - b. Calculer $v'(2)$, le débit instantané, en $L.h^{-1}$, après 2 heures de fonte.
 - c. Comparer ce résultat avec celui de Maxime.

EXERCICE 22

Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 12,5]$ par :

$$f(t) = 0,14t^3 - 3,15t^2 + 18,48t + 18$$

Lorsque t représente le temps, en minutes, on admet que $f(t)$ modélise le température, en degrés Celsius, du chocolat à l'instant t , au cours d'une opération de tempérage.

1. Pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 12,5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que :

$$f'(t) = 0,42(t - 4)(t - 11)$$

2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 12,5]$.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat?

EXERCICE 23

Un joueur de rugby se situe à une distance de 20 mètres des poteaux. Il souhaite que le ballon passe au-dessus de la barre située à 3 mètres du sol.

Le joueur est placé à l'origine d'un repère et la trajectoire du ballon peut être modélisée par la fonction h définie par $h(x) = ax^2 + bx + c$, où x représente la distance, en mètre, parcourue par la projection orthogonale du ballon sur le sol, et $h(x)$ la hauteur, en mètre, du ballon.

Partie A. Détermination de $h(x)$

1. On sait que $h(0) = 0$. Déterminer c .
2. Le joueur décide d'orienter son tir de telle sorte qu'au départ du ballon, l'angle formé par la tangente de la trajectoire avec le sol ait pour mesure 45° .

On a alors : $h'(0) = 1$.

- a. Calculer $h'(x)$.
 - b. On sait que $h'(0) = 1$. Déterminer b .
3. Le joueur sait que le ballon retouchera le sol à 25 mètres de lui.
 - a. Traduire cette information à l'aide de la fonction h .
 - b. Déterminer a .

Partie B. Étude de la trajectoire du ballon

On admet que $h(x) = -0,04x^2 + x$ pour $x \in [0 ; 25]$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 25]$.
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon?
Pour quelle valeur de x ?
5. Les poteaux se situent à 20 mètres du joueur.
 - a. Quelle est la hauteur du ballon à cet endroit?
 - b. Le joueur réussit-il son tir?

EXERCICE 24

Une entreprise produit des pizzas surgelées. On suppose qu'elle vend toute sa production par lots de 25 pizzas, à la grande distribution.

L'entreprise produit entre 10 et 100 lots par jour et le prix de vente d'un lot est égal à 78,50 €.

On estime que le coût total par jour de production, incluant les salaires, les ingrédients, les différentes charges, est donné par :

$$C(x) = 0,02x^3 - 2,5x^2 + 116x + 880$$

avec $x \in [10 ; 100]$, où x est le nombre de lots fabriqués, et $C(x)$ est le coût de fabrication de x lots, en euro.

Partie A. Coût marginal

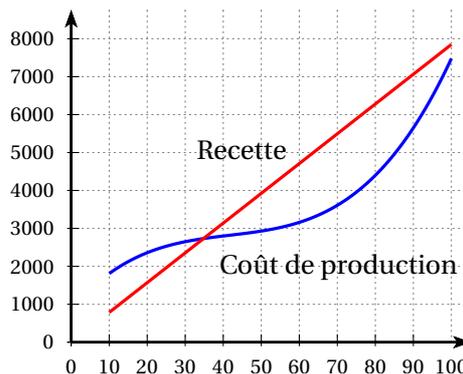
1. Calculer $C'(x)$.
2. On sait que le coût marginal $C_m(x)$ peut être assimilé à $C'(x)$. On pose : $C_m(x) = C'(x)$.
 - a. Calculer $C'_m(x)$.
 - b. Étudier les variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[10 ; 100]$.
 - c. Représenter graphiquement la fonction C_m sur la calculatrice.
3. Il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, soit 78,50 €.
 - a. Tracer sur le graphique précédent la droite d'équation $y = 78,50x$.
 - b. Déterminer graphiquement jusqu'à quelle valeur de x il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire.

Partie B. Étude du bénéfice

On pose $R(x) = 78,50x$, la recette en euro, pour x lots vendus.

Le bénéfice $B(x)$, pour x lots fabriqués et vendus, est la différence entre la recette et le coût de production. On pose : $B(x) = R(x) - C(x)$.

On a représenté les fonctions C et R dans le repère ci-dessous :



1. Par lecture graphique, estimer la valeur de x pour laquelle le bénéfice est maximal? Expliquer le raisonnement.
2.
 - a. Démontrer que : $B(x) = -0,02x^3 + 2,5x^2 - 37,5x - 880$.
 - b. Calculer $B'(x)$.
 - c. Démontrer que $B'(x) = (-0,6x + 0,5)(x - 75)$.
 - d. Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau de variations de B sur $[10 ; 100]$.
 - e. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal? Quel est ce bénéfice maximal?